№1. М-10-31-8

Подходит, например, число $\underbrace{673\,673\ldots673}_{2019\text{ раз}}$, то есть число, составленное из 2019 чисел 673, записанных подряд. Сумма его цифр равна $(6+7+3)\cdot 2019 = 16\cdot 2019 \vdots 2019$. Покажем, что и само число делится на 2019. $2019 = 3\cdot 673$. Число делится на 3, так как сумма его цифр делится на 3. Делится оно и на 673: результат деления равен $\underbrace{100\,100\ldots}_{2018\text{ раз}}1$, то есть, 2018 раз по 100 и 1 в конце. Раз число делится на 3 и 673, 3 и 673 взаимно просты, то и само число делится на 2019.

Ответ: $\underbrace{673\,673\ldots673}_{2019}$

1	2	3	4	5	6	Σ
7	6	7	7	7	7	42

№2

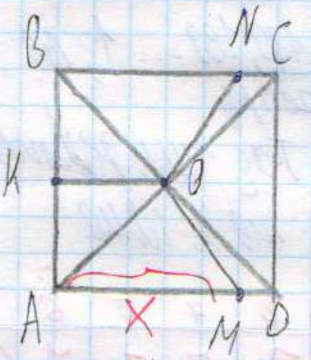
Пусть S – ~~это~~ количество денег у ~~Эда~~ деди, x – цена одной конфеты. Тогда $224x = S$. Пусть a, b, c, d – цены одного стаканчика, пирожного, шоколадки и ... соответственно. Тогда $112a = S$, $56b = S$, $32c = S$, $16d = S$.

$\frac{x}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2x$. Аналогично, $b = 4x$, $c = 7x$, $d = 14x$.

Так как ~~дед~~ дядя купил ~~подар~~ n подарков n племянникам, верно, что $n(x+2x+4x+7x+14x)=S=224x$.
То есть, $28nx=224x$. $n=\frac{224x}{28x}=8$. Значит, у дяди 8 племянников.
ответ: 8

№3

обозначим сторону квадрата за a. Её площадь равна a^2 тогда площадь каждой из фигур $AKOM$, $BKON$ и $CNOMD$ равна $\frac{a^2}{3}$.



А заметим, что $BO=OD$ (по св-ву параллелограмма), а $BK=KA$ =>
=> KO – средняя линия $\triangle ABD$ => $KO \parallel AD$. Тогда $AKOM$ – прямоугольная трапеция. $AK=\frac{a}{2}$, $KO=\frac{a}{2}$. Пусть $AM=x$. $S_{AKOM}=\frac{(KO+AM)}{2}\cdot AK=\frac{a^2}{3}$

$$\frac{\left(\frac{a+2x}{2}\right)}{2}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^2}{3} \quad \frac{a}{2}+x$$

$$\frac{(a+2x)a}{8}=\frac{a^2}{3} \Rightarrow a+2x=\frac{8a}{3}. \; x=\frac{5a}{6}.$$ То есть,

$AM = \frac{5a}{6} \Rightarrow \frac{AM}{AD}$ $\frac{AM}{AD} = \frac{5}{6}$, $AM : MD = 5 : 1$ М-10-31-8

ответ: $AM : MD = 5 : 1$

7б

№4

Так как во второй раз на доске оказались те же числа, понятно, что $a^4 - 2b^2 + b^4 - 2c^2 + c^4 - 2a^2 = a + b + c = -3$

То есть $a^4 - 2a^2 + 1 + b^4 - 2b^2 + 1 + c^4 - 2c^2 + 1 = 0$

Или $(a^2-1)^2 + (b^2-1)^2 + (c^2-1)^2 = 0$

Так как $(a^2-1)^2 \geq 0$, $(b^2-1)^2 \geq 0$ и $(c^2-1)^2 \geq 0$, очевидно, что их сумма равна 0 тогда и только тогда, когда

$a^2 - 1 = 0$,

$b^2 - 1 = 0$

$c^2 - 1 = 0$.

То есть $a = \pm 1$, $b = \pm 1$, $c = \pm 1 \Rightarrow |a| = |b| = |c| = 1$

Но $a^4 - 2b^2 = |a|^4 - 2|b|^2 = -1$. Аналогично $b^4 - 2c^2 = -1$ и $c^4 - 2a^2 = -1$. Значит, единственный возможный вариант: $a = b = c = -1$

ответ: $a = b = c = -1$.

№6

Пусть в стаде было n овец. Каждую продали за n рублей, значит, выручили n^2 рублей.

Пусть k — сколько рублей отдал ~~брат~~ младшему ~~брат~~ перед концом деления, после раза как ~~брат~~ старший взял последние ~~10~~ рублей). Тогда у старшего было на 10-k больше, и он отдал нож младшему. То есть нож оценили в $\frac{10-k}{2}$ рублей (половина от разницы). Заметим, что остаток от деления n^2 на ~~двадцать~~ 20

14 равен по-крайней мере 10 — если бы он был меньше 10, в ~~очередной~~ последний раз старший бы забрал меньше 10 рублей, а младшему не отдал бы ничего. Это связано с тем, что до последнего раза старший и младший брали 20 ~~раз~~ рублей на двоих 2a раз, а в последний раз — меньше 20, но не меньше 10. Теперь посмотрим, какие остатки от деления на 20 может иметь n^2 [illegible]

Для этого переберем все остатки n от деления на 20 (других быть не может): Таблица:

Остаток от $n:20$	Остаток от $n^2:20$
0	0
1	1
2	4
3	9

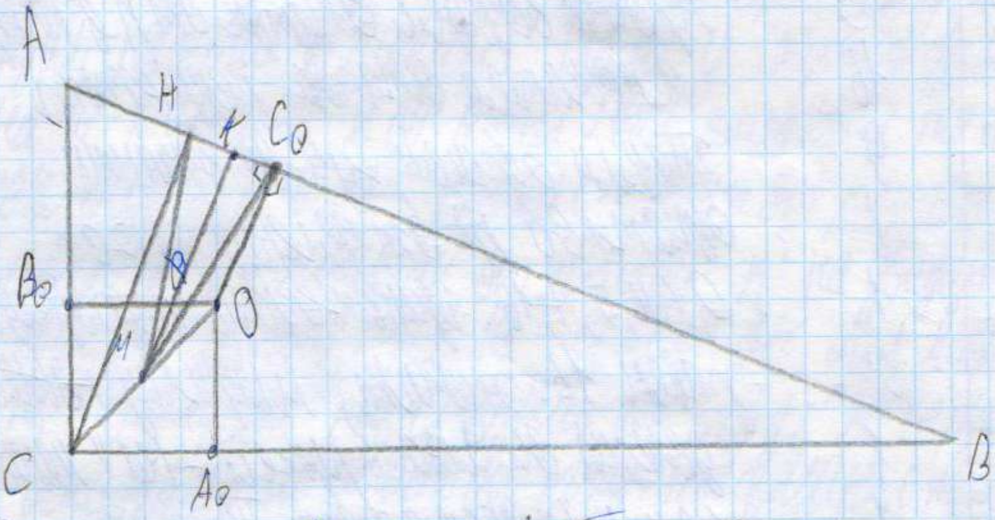
4	16
5	5
6	16
7	9
8	4
9	1
10	0
11	1
12	4
13	9
14	16
15	5
16	16
17	9
18	4
19	1

Чтобы получить остаток от n^2, просто возводим остаток от n в квадрат и получаем остаток результата. M-10-31-8

Таким образом, ~~где~~ все варианты остатков n^2 от деления на 20: 0, 1, 4, 5, 9, 16. Единственный подходящий равен 16. Значит, младшему ~~[illegible]~~ должно остаться 6 рублей — на 4 меньше, чем у старшего брата. Тогда он отдал ему нож стоимостью $\frac{10-6}{2} = 2$ рубля.

Ответ: 2 рубля.

№5



Решение: ~~т.к. MC_0 радиус~~ Пусть O – центр окружности. Заметим, что $B_0C = \cancel{...} A_0C$, $OB_0 \perp AC$ => CB_0OA_0 – квадрат. Тогда M – середина CO (диагональ). $OC_0 \perp AB$ (радиус к касательной), $CH \perp AB$ => $CH \parallel OC_0$. Тогда COC_0H – прямоугольная трапеция. Докажем, что $MH = MC_0$:

1. Пусть K – середина HC_0. Тогда MK – средняя линия трапеции, $MK \parallel CH$ => $MK \perp AB$.

Тогда в $\triangle MHC_0$ MK – и медиана, и высота. Значит, MHC_0 – равнобедренный, $MH = MC_0$ #