№1 М-11-67

Можно (см. таблицу)

$2-2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	сумма: 2
$\sqrt{2}$	$2-2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	сумма: 2
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$2-2\sqrt{2}$	сумма: 2
Сумма: 2	Сумма: 2	Сумма: 2	

№2

Пусть S_1 - площадь 1-ого парка, S_2 - площадь второго. Каждый из них разбит на k участков:

$ka = S_1$, где a - площадь участка 1-ого парка

$kb = S_2$, где b - площадь участка 2-ого парка

Из условия: $S_1 = 75b$, а $S_2 = 108a$

тогда: $\begin{matrix} ka = 75b \\ 108a = kb \end{matrix} \Rightarrow \frac{k}{108} = \frac{75}{k}$

$k^2 = 108 \cdot 75$ т.к. $k > 0$ (это число участков):

$k = \sqrt{108 \cdot 75} = 90$

Из условия:

$S_1 + S_2 = 110$

Тогда:

$$\begin{cases} ka + kb = 110 \\ ka = 75b \end{cases}$$

подставим уже известное нам k:

$$\begin{cases} 90a + 90b = 110 \\ 90a = 75b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = \frac{11}{9} \\ a = \frac{5}{6}b \end{cases}$$

$$\frac{5}{6}b + b = \frac{11}{9}$$

$$\frac{5b + 6b}{6} = \frac{11}{9}$$

$$\frac{11b}{6} = \frac{11}{9}$$

$$\frac{b}{6} = \frac{1}{9} \Rightarrow b = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$a = \frac{5}{6}b = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

Тогда $S_1 = ka = 90 \cdot \frac{5}{9} = 50$ (га) - пл. 1-го парка

$S_2 = kb = 90 \cdot \frac{2}{3} = 60$ (га) - пл. 2-ого парка

Ответ: 50 га – пл. 1-ого парка
60 га – пл. 2-ого парка

№4

$f(x)=x^2+4x+3=y$

$g(x)=x^2+2x-1=z$

$f(g(f(x)))=g(f(g(x)))$

$f(g(y))=g(f(z))$

$f(y^2+2y-1)=g(z^2+4z+3)$

$(y^2+2y-1)^2+4(y^2+2y-1)+3=$

$=(z^2+4z+3)^2+2(z^2+4z+3)-1$

пусть $y^2+2y-1=p$,

а $z^2+4z+3=q$

Заметим, что $p, q \in Z$, т.к.

y^2+2y-1 и z^2+4z+3 – целые;

$y=x^2+4x+3$, $z=x^2+2x-1$, которые являются целыми, поскольку x из условие целое, а раз целыми являются y и z, то y^2+2y-1 – целое и z^2+4z+3 – целое, а значит, $p, q \in \mathbb{Z}$, т.к.

$p = y^2+2y-1$, а $q = z^2+4z+3$

$$p^2+4p+3 = q^2+2q-1$$

$$p^2+4p+4 = q^2+2q+1-1$$

$$(p+2)^2 = (q+1)^2 - 1$$

$$(p+2)^2 - (q+1)^2 = -1$$

$$(p+2-q-1)(p+2+q+1) = -1$$

т.к. p и q целые, решим диафантово ур-е в целых числах. Т.к. $-1 = 1 \cdot (-1)$ и только то:

либо

① $\begin{cases} p+2-q-1 = 1 \\ p+2+q+1 = -1 \end{cases}$

либо

② $\begin{cases} p+2-q-1 = -1 \\ p+2+q+1 = 1 \end{cases}$

(1) $\begin{cases} p - q = 0 \\ p + q = -4 \end{cases}$ +

$2p = -4$

$p = -2$

$q = -2$

Вернемся к замене:

$y^2 + 2y - 1 = -2$ (1)

$z^2 + 4z + 3 = -2$ (2)

(1) $y^2 + 2y + 1 = 0$

$y = -1$

(2) $z^2 + 4z + 5 = 0$

$D < 0$

$(16 - 20 < 0)$

решений нет (+)

(2) $\begin{cases} p - q = -2 \\ p + q = -2 \end{cases}$ ✓

$p = -2$

$q = 0$

$y^2 + 2y - 1 = -2$ (1)

$z^2 + 4z + 3 = 0$ (2)

(1) $y^2 + 2y + 1 = 0$

$y = -1$

(2) $z^2 + 4z + 3 = 0$

$z = -1$ $z = -3$

вспоминаем, что $y = x^2 + 4x + 3$

$x^2 + 4x + 3 = -1$

$x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -2}$ (+)

тогда x может быть только -2

$z = x^2 + 2x - 1$

$x^2 + 2x - 1 = -1$

$x^2 + 2x = 0$

$x = 0$ $x = -2$

$x^2 + 2x - 1 = -3$

$x^2 + 2x + 2 = 0$

$D < 0$ $4 - 4 \cdot 2 < 0$

нет решений

~~Т.к. x в y и z один и тот же, x может быть равен только -2, поскольку это корень обоих многочленов~~

~~Тогда~~

Теперь убедимся, что $x = -2$ обращает в 0 либо многочлен $\cancel{x^2+2x-1=-1}$ x^2+2x, либо многочлен x^2+2x+2

x^2+2x при $x=-2$ обращается в ноль

(т.к. $z = x^2+2x-1$, и одному из 2-х значений $z = -1$, то $x^2+2x-1=-1$)

x^2+2x+2 не имеет корней вовсе;

(при $z=-3$: $z = x^2+2x-1$, $-3 = x^2+2$

$D<0$ $(4-4\cdot 2<0)$

Мы убедились, что $x=-2$ — корень, и доказали, что других нет.

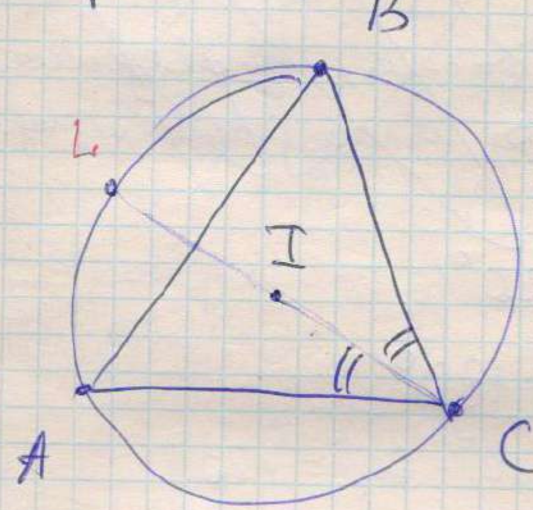
Ответ: $x=-2$

75

№5

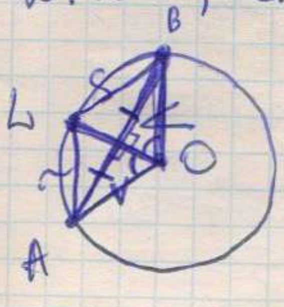
Пусть середина дуги AB – L.

1. Д-м, что C, I, L лежат на 1-ой прямой.



Проведем CI.
I – центр ~~окр~~ вписанной окр.
⇓
CI бис-са ∠C
Тогда углы ICA и ICB опираются на одинаковые дуги. ⇒ CI проходит ч/з середину AB, а значит, L, I и C на одной прямой.

2. Д-м, что LBOA – ромб.



∠BOA = 2∠BCA, т.к. BOA – центральный угол, опирающийся на дугу AB, ~~рав~~ в 2 раза больше вписанного угла, опи–

рающегося на ту же дугу

~~∠BOL = ∠LOA, т.к. это центральные углы, опирающиеся на равные дуги. Тогда LO – бис-са ∠BOA.~~

~~Т.к. BO = OA, то бис-са, проведенная к основанию AB, является также и медианой, и высотой.~~

Тогда $\angle BOA = 120^\circ$

$\angle ALB + \angle BCA = 180^\circ$

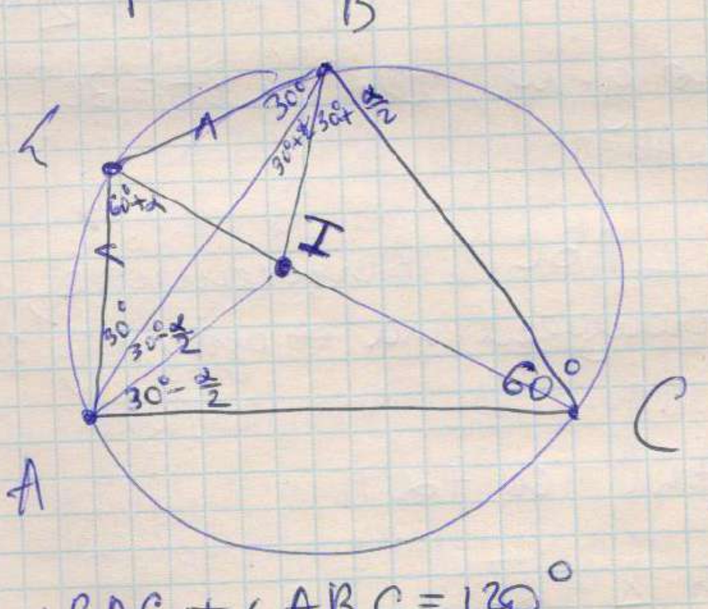
Тогда $\angle ALB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$\triangle BOA$ – равнобедренный.
$(BO = OA) \Rightarrow \cancel{\angle BOA}\ \angle OBA = \angle OAB = 30^\circ$

$\triangle ALB$ – равнобедр.
($LB = LA$, т.к. стягивают равные дуги) $\Rightarrow \angle LBA = \angle LAB = 30^\circ$

Тогда
$\triangle ALB = \triangle BOA$
(AB – общая, $\angle LBA = \angle OBA = 30^\circ$, $\angle LAB = \angle BAO = 30^\circ$)

Тогда $LB = BO$.
т.к. $LB = LA$, а $BO = OA$,
$LB = LA = BO = OA$; четырехугольник
у кот. все стороны равны — ромб.
т.к. OB - радиус описанной
окр. R,
то и $LB = LA = R$
Теперь:



$\angle BAC + \angle ABC = 120^\circ$
пусть $\angle ABC \geq \angle BAC$
тогда $\angle ABC \geq 60^\circ$, а $\angle BAC \leq 60^\circ$,
т.к. $\exists\ \angle ABC < 60^\circ$, то и $\angle BAC < 60^\circ$, и тогда
в сумме они дают $< 120^\circ$.

Тогда пусть $\angle \cancel{B}ABC = 60^\circ + \alpha$

$\angle CAB = 60^\circ - \alpha$ (т.к. $\angle CAB = 120^\circ - \angle BA$

Т.к. I - центр вписанной окр,

AI - бис-са угла A

BI - бис-са угла B

Тогда $\angle CAI = \angle IAB = 30^\circ - \frac{\alpha}{2}$ $\left(\frac{60^\circ - \alpha}{2}\right)$

$\angle CBI = \angle \cancel{BIA}\, IBA = 30^\circ + \frac{\alpha}{2}$ $\left(\frac{60^\circ +}{2}\right.$

Ранее мы д-ли, что $\angle LBA = 30^\circ$

и $\angle LAB = 30^\circ$

$\angle ALC = \angle ABC$ (вписанные, опирающиеся на ~~оо~~ одну и ту же дугу)

Тогда $\angle ALC = 60^\circ + \alpha$

Тогда из $\triangle ALI$:

$\angle LIA = 180^\circ - \angle ILA - \angle LAI =$

один и тот же угол, т.к. C и L на одной прямой

$= 180^\circ - \angle CLA - \cancel{\angle LAI} = - \angle LAB - \angle BAI$

$\angle LAI = \angle LAB + \angle BAI$

$= 180^\circ - 60^\circ - \alpha - 30^\circ - 30^\circ + \frac{\alpha}{2} =$

$= 60^\circ - \frac{\alpha}{2}$

$\angle LAI = 30^\circ + 30^\circ - \frac{\alpha}{2} = 60^\circ - \frac{\alpha}{2}$

$\angle LAI = \angle LIA \Rightarrow \triangle ALI$ - равнобедренный

$AL = LI$

т.к. $AL = R$, что уже было доказано, то и $LI = R$,

т.е. LI равно радиусу описанной окр, т.е. отрезок, соединяющий I и середину AB, равен радиусу описанной окружности.

Заметим, что в случае $\angle BAC \geq \angle ABC$ ситуация была бы аналогичной, на чертеже бы только поменялись местами буквы A и B, а потому этот случай можно не рассматривать.

ЧТД

№6

Пусть числа, написанные Петей:

$\overline{a_1a_2a_3}$, $\overline{b_1b_2b_3}$, $\overline{c_1c_2c_3}$

при этом

$$100(a_1+b_1+c_1)+10(a_2+b_2+c_2)+(a_3+b_3+c_3)=2019$$

Сумма Васи будет выглядеть так:

$$\overline{a_3a_2a_1}+\overline{b_3b_2b_1}+\overline{c_3c_2c_1}=100(a_3+b_3+c_3)+10(a_2+b_2+c_2)+(a_1+b_1+c_1)$$

сумма $a_3+b_3+c_3$ оканчивается на 9, поскольку $100(a_1+b_1+c_1)+10(a_2+b_2+$ $+a_3+b_3+c_3=2019$

т.к. a_i, b_i, c_i – числа

$a_3+b_3+c_3$ не превосходит $9\cdot 3$

$=27$,

тогда $a_3+b_3+c_3 = \overset{(1)}{9}$ или $\overset{(2)}{19}$

в случае (1)

сумма Васи не превосходит $9\cdot 100+10\cdot 27+27$, что меньше, чем 1900

$\Downarrow$

наибольшее зн-е суммы Васи достигается при $a_3+b_3+c_3=19$

Тогда при вычислении суммы $\overline{a_1a_2a_3}+\overline{b_1b_2b_3}+\overline{c_1c_2c_3}$ имел место переход ч/з разряд

и $a_2+b_2+c_2+1$ заканчивается на 1. Тогда $a_2+b_2+c_2$ заканчивается на ноль. С учетом, что $a_2+b_2+c_2\le 27$,

$a_2+b_2+c_2 = \overset{(1)}{0}, \overset{(2)}{10}$ или $\overset{(3)}{20}$

Однако $1900+100+27$ (то зн-е, которого не превосходит сумма в случаях (1) и (2)) меньше, чем $1900+200$ (минимальное значение суммы в 3-ем случае)

Тогда наибольшее зн-е суммы достижимо, когда ~~a_3~~ $a_2+b_2+c_2$ $=20$ => имел место переход 2/3 разряд при вычислении Петиной суммы

И, наконец, $a_1+b_1+c_1+2=20$ т.к. был переход 2/3 разряд

$a_1+b_1+c_1=18$

И наибольшее зн-е суммы Васи

$100\cdot 19+10\cdot 20+18=1900+200+18=$

$=2118$

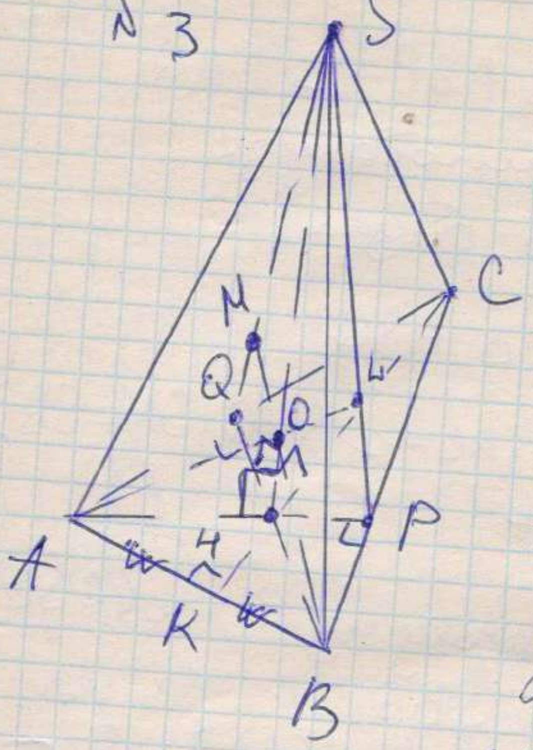
Заметим, что такое значение суммы достижимо,

например, при Петиных числах 554, 776 и 689 (в сумме 2019), ~~и при~~ тогда числа Васи 986, 677, 455, в сумме 2118)

+

Ответ: 2118

№ 3



$AC = BC$

Заметим:
$AH = HB$, поскольку CK - высота, проведенная к основанию, она же медиана, значит, $\triangle AHB$ - равнобедренный (HK - высота и медиана)

Тогда $HP = HQ$, т.к. $AP = BQ$ - высоты равнобедр. $\triangle$, проведенные к равным сторонам ($AP = AH + HP$, а $BQ = BH + HQ$)

$BS = AS$, т.к. их проекции на пл. ACB равны ($AH = HB$, это проекции, т.к. $SH \perp (ABC)$)

~~Тогда~~ Тогда $\triangle ASC = \triangle BSC$ по 3-м сторонам: SC - общая, $AS = BS$, $AC = BC$, тогда $\angle SBC = \angle SAC$

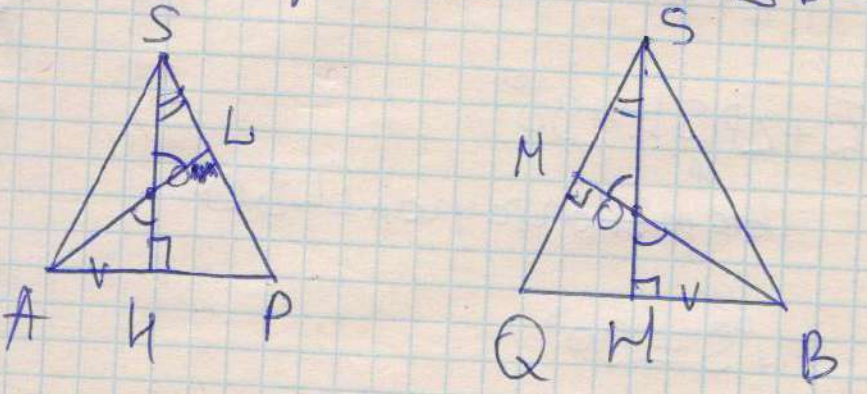
$AQ = BP$, т.к. $\triangle ABP = \triangle BAQ$
по катету и гипотенузе
($AP = BQ$, AB - общая)

тогда $\triangle BSP = \triangle ASQ$
($AQ = BP$, $\angle SBC = \angle SAQ$, $SA = SB$)
Тогда $SQ = SP$

Рассмотрим высоту из B на (ASC)
она будет в пл. SBQ, т.к. эта пл. $\perp (ABC)$ (т.к. $SH \perp (ACB)$, а $SH \subset (BSQ)$), а значит, любая пр. из B $\perp AC$, тогда в этой пл. проведем перп. на SQ, назовем его BM,
$BM \perp AC$, т.к. в пл. $\perp AC$, $BM \perp SQ \Rightarrow$
$\Rightarrow BM \perp (ASC)$ и BM - искомая высота.
Т. пер-е BH и SH - O. (пересекутся, т.к. в 1 пл. SBQ лежат)
проведем AO. Эта прямая

лежит в пл. ASH, а значит и в пл. ASP, поскольку это одна и та же плоскость. Точку пер-я SP и AB O назовем L

Рассмотрим △ASP и △BQS



~~HP = HQ (доказана~~

△BOH = △AOH, ~~т.к. OH~~
по 2-м катетам (OH - общий, AH = BH - доказано ранее)
тогда ∠AOH = ∠BOH
тогда ∠SOL = ∠SOM, т.к.
∠SOL = ∠AOH (вертикальные)
∠SOM = ∠BOH => ∠SOL = ∠SOM
~~Ранее~~ △SHP = △SHQ, т.к. по 2-м катетам

(HP=QH – д-но выше}, SH – общ.)
Тогда ∠PSH = ∠QSH
∠QSH + ∠SOM = 90°
∠SOL = ∠SOM,
∠PSH = ∠QSH

⇓

∠SOL + ∠PSH = 90°

всё равно что угол ∠LSO

⇓

∠ALS = 90°

AL ⊥ SP, AL ⊥ CB (т.к.

AL ⊂ (ASP), а значит, ⊥ ~~BB~~ CB,
поскольку (ASP) ⊥ (ACB), т.к.
проходит ч/з SH, ⊥ (ACB)) ⇒
⇒ AL ⊥ (BSC), а значит,
высота пирамиды из A.
Тогда высота пирамиды, проведенная из A, проходит ч/з т.
пересечения высот пирамиды

из B и S, а значит, высоты пирамиды, проведенные из S, A и B, пересекаются в 1-ой точке

ЧТД

75