M-11-68

№1. Ответ: да, такое может оказаться.

1	2	3	4	5	6	Σ
7	7	7	7	7	7	42

Пример:

$$\begin{array}{|c|c|c|c} \hline \sqrt{2} & -3\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & =0 \\ \hline 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & -3\sqrt{2} & =0 \\ \hline -3\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & =0 \\ \hline \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

Очевидно сумма во всех строках и столбцах равна $\sqrt{2}+2\sqrt{2}-3\sqrt{2}=0$, т.е. рац. числу.

№2 Пусть a - площадь первого парка, b - площадь второго. Пусть k - кол-во участков, на кот. разбили каждый парк, тогда площадь каждого участка в первом парке: $\frac{a}{k}$ во втором парке $\frac{b}{k}$. Согласно условию запишем систему и решим её:

$$\begin{cases} a+b=110 \\ \dfrac{a}{\frac{b}{k}}=75 \\ \dfrac{b}{\frac{a}{k}}=108 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b=110 & (1) \\ \dfrac{ak}{b}=75 & (2) \\ \dfrac{bk}{a}=108 & (3) \end{cases}$$

Очевидно, $a, b, k \neq 0$ иначе выражения $\frac{a}{k}$, $\frac{b}{k}$, $\frac{ak}{b}$ и $\frac{bk}{a}$ не имели бы смысла.

Отсюда следует, что $a, b, k > 0$ по определению этих величин

Перемножим (2) и (3)

$\frac{ak}{b} \cdot \frac{bk}{a} = 75 \cdot 108$

$k^2 = 3 \cdot 25 \cdot 3 \cdot 36$

$k^2 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 6^2$

$k = 3 \cdot 5 \cdot 6 = 90.$

Тогда

$\begin{cases} a+b=110 \\ \frac{ak}{b}=75 \\ k=90 \end{cases}$ $\begin{cases} a+b=110 \\ 90a=75b \end{cases}$

$\begin{cases} 5a+5b=550 \\ 6a=5b \end{cases}$ $5a+6a=550$

$11a=550, \quad a=50$

$b=\frac{6a}{5}=\frac{6 \cdot 50}{5}=60$

Ответ: площадь первого парка $a=50$ га

площадь второго парка $b=60$ га

№4. Решить в целых числах

$f(x) = x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 1$

$g(x) = x^2 + 2x - 1 = (x+1)^2 - 2$

1) $g(f(x)) = ((x+2)^2 - 1 + 1)^2 - 2 = (x+2)^4 - 2$

$f(g(f(x))) = ((x+2)^4 - 2 + 2)^2 - 1 = (x+2)^8 - 1$

2) $f(g(x)) = ((x+1)^2 - 2 + 2)^2 - 1 = (x+1)^4 - 1$

$g(f(g(x))) = ((x+1)^4 - 1 + 1)^2 - 2 = (x+1)^8 - 2$

$$f(g(f(x))) = g(f(g(x)))$$

$$(x+2)^8 - 1 = (x+1)^8 - 2$$

$$(x+2)^8 - (x+1)^8 = -1$$

Пусть $t = (x+1)$, $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \in \mathbb{Z}$

$(t+1)^8 - t^8 = -1$

Найдём, когда $(t+1)^8 - t^8 < 0$

$\underbrace{((t+1) - t)}_{=1>0}((t+1)+t)\underbrace{((t+1)^2 + t^2)}_{>0}\underbrace{((t+1)^4 + t^4)}_{>0} < 0$

$2t + 1 < 0 \quad t < -\frac{1}{2}$, $t \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \leq -1$

Пусть $m = -t - 1$, $t \leq -1 \Rightarrow m \geq 0$

$\cancel{(-t-1+1)^8}$

$t = -m - 1$

$(-m-1+1)^8 - (-m-1)^8 = -1$

$m^8 - (m+1)^8 = -1$

$(m+1)^8 - m^8 = 1$

$\cancel{m^8} + 8m^7 + 28m^6 + 56m^5 + 70m^4 + 56m^3 + 28m^2 + 8m + \cancel{1} - \cancel{m^8} = \cancel{1}$

$m(\underbrace{8m^6 + 28m^5 + 56m^4 + 70m^3 + 56m^2 + 28m + 8}_{f(m)}) = 0$

$m = 0$ или $f(m) = 0$

Очевидно при $m \geq 0$

$f(m) \geq 8 \Rightarrow f(m) \neq 0$

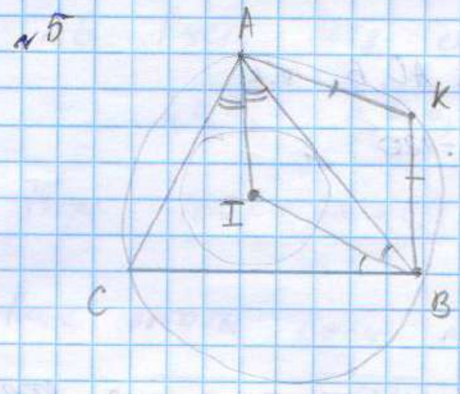
$m = 0 \Rightarrow t = -0 - 1$, $t = -1$

$(x+1) = -1$

$x = -2$

Ответ: $x = -2$

№5



Дано: $\triangle ABC$, ω_1 - впис. окр., центр I, ω_2 - опис. окр., $\angle C = 60°$, K - сер. $\overset{\frown}{AB}$

Д-ть: $IK = R_{\omega_2}$

Док-во: I. I - центр впис. окр $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ лежит на пересеч. бисс $\Rightarrow$ AI, BI - бисс.

$\angle ABC + \angle BAC + \angle BCA = 180°$

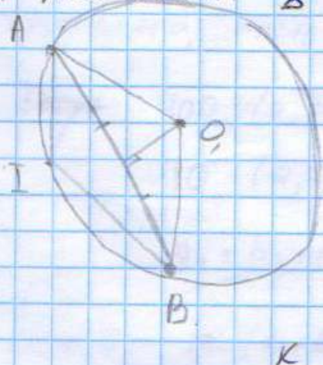
$\angle BAC + \angle ABC = 180 - \angle ACB = 120°$

$\frac{\angle BAC}{2} + \frac{\angle ABC}{2} = 60 \Rightarrow \angle IAB + \angle IBA = 60 \Rightarrow \angle AIB = 180 - 60 = 120°$

II. 4-к $ACBK$ - впис. в окр $\Rightarrow \angle AKB = 180 - \angle ACB = 180 - 60 = 120°$

K - сер. дуги $\overset{\frown}{AB} \Rightarrow AK = KB \Rightarrow K$ принадлежит сер. пер. к отрезку AB. и $\angle KAB = \angle KBA = 30°$

III. Рассмотрим $\triangle AIB$ и его опис. окружность (пусть O_1 - её центр)



~~Возьмём произвольную точку~~

$\overset{\frown}{AB} = 2 \cdot \angle AIB = 2 \cdot 120 = 240 \Rightarrow$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AIB} = 360 - 240 = 120 \Rightarrow \angle AO_1B = 120°$

Также O_1 принадлежит сер. перпендикуляру к хорде AB (из св-в окружности) или

$\triangle AO_1B$ - равнобедренный и $\angle O_1AB = \angle O_1BA = 30°$

Заметим, что $\triangle AKB = \triangle AO_1B$, т.к.

$AB = AB$, $\angle AKB = \angle AO_1B = 120^\circ$ и

$\angle KAB = \angle O_1AB = 30^\circ$

$\angle KBA = \angle O_1BA = 30^\circ$

Отсюда следует, что K - центр опис. окр $\triangle AIB$.

По т. синусов её $R = \frac{AB}{2\sin\angle AIB} = \frac{AB}{2\sin 120} = \frac{AB}{2\sin 60}$

Т.е. $KI = \frac{AB}{2\sin 60}$

IV Найдем $R_{\text{опис. окр. } \triangle ABC} = R_{\omega_2} \overset{\text{по т. синусов}}{=} \frac{AB}{2\sin\angle ACB} = \frac{AB}{2\sin 60}$

Заметим, что $IK = R_{\omega_2}$, ч.т.д.

№6. Пусть Петя создал числа

$\overline{a_1a_2a_3}$, $\overline{b_1b_2b_3}$ и $\overline{c_1c_2c_3}$

Тогда $\underbrace{100(a_1+b_1+c_1)}_{\vdots 10} + \underbrace{10(a_2+b_2+c_2)}_{\vdots 10} + (a_3+b_3+c_3) = 2019$

После работы Васи получились числа

$\overline{a_3a_2a_1}$, $\overline{b_3b_2b_1}$ и $\overline{c_3c_2c_1}$

Их сумма $sum = 100(a_3+b_3+c_3) + 10(a_2+b_2+c_2) + (a_1+b_1+c_1)$

$sum = 100(a_3+b_3+c_3) + 2019 - 100(a_1+b_1+c_1) - (a_3+b_3+c_3) + (a_1+b_1+c_1) =$

$= 2019 + 99((a_3+b_3+c_3) - (a_1+b_1+c_1))$

Очевидно, что $a_3+b_3+c_3 \underset{10}{\equiv} 9$ (следует из карандаш. пометок).

Также верно, что $a_1+b_1+c_1 \geq 18$. Докажем это от противного, пусть $a_1+b_1+c_1 \leq 17$.

Тогда $100(a_1+b_1+c_1) \leq 1700$

$10 \cdot (a_2+b_2+c_2) \leq 10 \cdot (9+9+9) = 270$

$a_3+b_3+c_3 \leq 9+9+9 = 27$

т.е. $100(a_1+b_1+c_1) + 10(a_2+b_2+c_2) + a_3+b_3+c_3 \leq 1997 < 2019$.

Противоречие, сл-но $a_1+b_1+c_1 \geq 18$

Итак: $Sum = 2019 + 99((a_3+b_3+c_3) - (a_1+b_1+c_1))$

$\begin{cases} a_3+b_3+c_3 \underset{10}{\equiv} 9 \\ a_3+b_3+c_3 \leq 9+9+9 = 27 \end{cases}$ $\quad a_3+b_3+c_3 \leq 19$

и

$a_1+b_1+c_1 \geq 18.$

Необходимо максимизировать $Sum \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{matrix} a_3+b_3+c_3 = 19 \\ a_1+b_1+c_1 = 18 \end{matrix} \Bigg| \Rightarrow Sum = 2019 + 99((19-18) = 2019 + 99 = 2118$

Проверим пример в подтверждение ответа:

Изначально были числа:

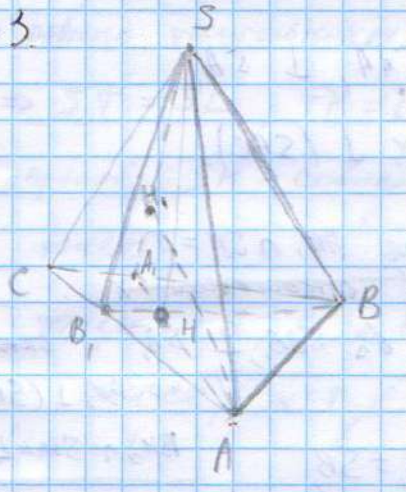
$979 + 879 + 161 = 2019$

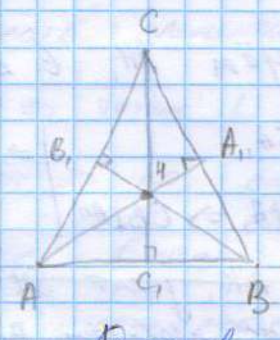
Стали числа

$979 + 978 + 161 = 2118$, ч.т.д.

Ответ: наибольшую сумму, кот. мог получить Вася: 2118

№3.





Дано: SABC - треуг. пир.
$\triangle ABC$ - равнобед. остроуг.
$AC = BC$, H - ортоцентр.
SH - высота SABC.

Д-ть: высоты пирамиды из точек S, A, B - пересек. в одной т.

Док-во: I. в основании ABC проведем все высоты.

$\triangle ABC$ - равнобед $(AC = BC) \Rightarrow AA_1 = BB_1 \Rightarrow \triangle CAA_1 = \triangle CBB_1 \Rightarrow$
(по катету и гипотенузе)

$\Rightarrow CA_1 = CB_1 \Rightarrow \triangle CA_1H = \triangle CB_1H \Rightarrow A_1H = B_1H$
(по кат. и гип)

$\triangle ABC$ - равнобед $(AC = BC) \Rightarrow C_1C$ - высота, медиана $\Rightarrow AC_1 = C_1B \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AHC_1 = \triangle BHC_1 \Rightarrow AH = BH$.
(по 2ум катетам)

II. Заметим, что A_1H - проекция A_1S на (ABC).

По теор. о трех перпенд. $\left.\begin{array}{l} AA_1 \perp CB \\ A_1H - пр_{(ABC)} A_1S \end{array}\right| \Rightarrow SA_1 \perp BC$

$\left.\begin{array}{l} AA_1 \perp BC \\ SA_1 \perp BC \end{array}\right| \Rightarrow CB \perp (SAA_1)$

III. проверём AH_1 в $\triangle SAA_1$, $\perp SA_1$

$$\left.\begin{aligned} &AH_1 \perp SA_1 \\ &CB \perp SAA_1 \Rightarrow CB \perp AH_1 \end{aligned}\right| \Rightarrow AH_1 \perp (SBC)$$

Пусть $AH_1 \cap SH = T$

~~Пусть AH_1 делит SH в отношении x.~~

Аналогично проведём BH_2 в $\triangle SBB_1$, $\perp SB_1$ и скажем что $BH_2 \perp (SAC)$

$BH_2 \cap SH = L$

IV. Заметим, что

$\triangle SHA_1 = \triangle SHB_1 \Rightarrow SA_1 = SB_1$

(по двум катетам)

$A_1H = B_1H$, $SH = SH$

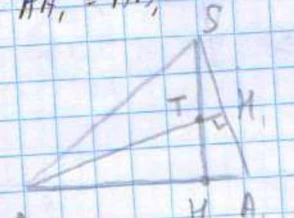
$\triangle SHA = \triangle SHB \Rightarrow SA = SB$

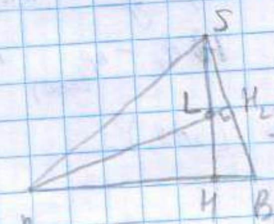
(по двум катетам)

$AH = HB$, $SH = SH$

и $AA_1 = BB_1$ (как высоты в равнобедр. $\triangle ABC$)

$$\left.\begin{aligned} &SA_1 = SB_1 \\ &SA = SB \\ &AA_1 = BB_1 \end{aligned}\right| \Rightarrow \triangle SAA_1 = \triangle SBB_1$$





В равных треугольниках соотв. элементы равны ⇒

⇒ $ST = SL$, $TH = LH$ ⇒ точки L и T на

прямой SH - совпадают ⇒ по определению

точек L и T ~~...~~ высоты пирамиды из

точек S, A и B пересекаются в одной

точке, ч.т.д.

(в точке L)

7.