8-300-1

1	2	3	4	5	6
7	7	7	7	2	7

ТЕТРАДЬ

для ____________________________

____

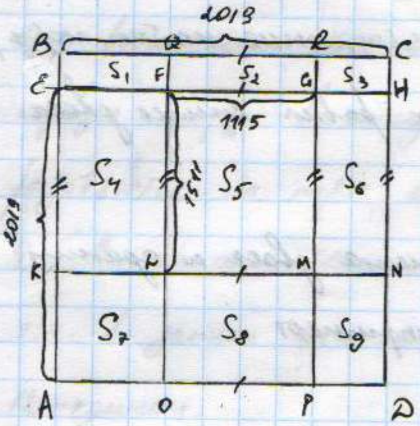
учени__________класса__________

__________школы__________

____

____

№ 1.



$S_{общ}$ (Sвсего квадрата) $= 2019^2$

S_5 (центральный пр-к) $= 1115 \cdot 1511$

Заметим, что пр-к $KEHN$ имеет $S_a = 1511 \cdot 2019$ или же $S_a = S_4 + S_5 + S_6$; пр-к ~~OQ~~ $OQRP$ имеет $S_b = 1115 \cdot 2019$ или же $S_b = S_2 + S_5 + S_8$

Тогда $S_1 + S_3 + S_7 + S_9$ (то, что ищется в задаче) $=$

$= S_{общ} - S_a - S_b + S_5$, т.е. $S_1 + S_3 + S_7 + S_9 = S_{общ} - S_4 - S_5 - S_6 -$

$- S_2 - S_5 - S_8 + S_5 \Rightarrow S_1 + S_3 + S_7 + S_9 = 2019^2 - 1511 \cdot 2019 -$

$- 1115 \cdot 2019 + 1115 \cdot 1511 = 2019(2019 - 1511 - 1115) + 1115 \cdot 1511 =$

$= 1115 \cdot 1511 - 2019 \cdot 607 = \underline{459232}$

Ответ: 459232 (кв. ед.)

7 8

4

+

→

№2.

Заметим, что для некоторых чисел можно найти пару, такую, что сумма единиц в них равна сумме двоек.

I. Рассмотрим числа 1-99:

При записи таких чисел разница двоек и единиц равна 0. Разбиение на пары, пример:

1 - 2
10 - 20
12 - 21
1 - 2 и т.п. (если в числе есть 1, то она меняется на 2, и наоборот 2 меняется на 1)

II. Рассмотрим числа 100 - 299:

При записи таких чисел разница двоек и единиц равна 0. Разбиваем на пары аналогично с п. I, пример:

100 - 200
101 - 202
137 - 237 и т.п.
132 - 231

III. Числа 300 - 999 аналогично с п. I разбиваются на пары, т.е. числа 1 - 999 не дают разницу в кол-ве двоек и единиц.

IV. В числах 1000–1999 будет на 1000 единиц больше, т.к. всего чисел 1000 в данном промежутке, и если убрать первую цифру в каждом числе (единицу), то числа разобьются на пары как в п. I–III.

V. В числах 2000–2019 будет на ~~...~~ 10 двоек больше, т.к. в записи этих чисел встречаются 22 двойки и 12 единиц.

VI. Разница в двойках и единицах будет $1000-10=990$; единиц больше.

__Ответ__: выписали на 990 единиц больше 7б.

№3.

Всего столбов 2019.

Мы можем посчитать кол-во хороших столбов и вычесть его из общего кол-ва столбов.

Пусть с одной стороны столб имеет номер n, тогда с другой - $(2020-n)$

$1 \leq n \leq 2019$; $n \in \mathbb{N}$

Столб хороший, если $n \vdots x$ и $(2020-n) \vdots x$; $x > 1$, $x \in \mathbb{N}$

Тогда $2020 \vdots x$. $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$, т.е. имеет $(2+1)(1+1)(1+1) =$
$= 12$ делителей: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 101, 202, 404, 505, 1010, 2020.

$x \neq 1$ по условию, $x \neq 2020$, т.к. $n < 2020$.

Если $x = 2$, то n - четное; $(2020-n)$ тоже четное $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ каждый второй столб - хороший; всего 2019 столбов $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ 1009 столбов хорошие с $x = 2$.

Если x другое четное число, то они уже считались в множестве $x = 2$ $\Rightarrow$ осталось рассмотреть варианты
$x = 5$, $x = 101$, $x = 505$.

Если $x = 505$, n-нечет (т.к. все четные уже посчитаны), то есть только вариант чисел на столбах
505 и 1515; 1515 и 505. $\Rightarrow$ еще 2 хороших столба

Если $x=101$, $n \not\vdots 2,5$ (иначе число будет чётным или $:505$ т.е. уже посчитанным) $\Rightarrow$ это пары $101, 1919$; $303, 1717$; $707, 1313$; $909, 1111$; плюс, такие же пары, только числа поменяны местами, т.е. ещё $4 \cdot 2 = 8$ хороших столбов

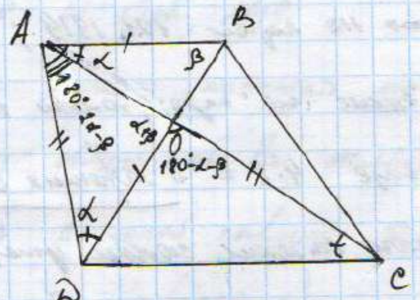
Если $x=5$; $n \not\vdots 2, 101$ (иначе оставшиеся столбы уже посчитаны), то, есть ещё столбы: каждый 5-ый столб имеет $x=5$, т.е. 403 столба; каждый 10-ый столб имеет $x = 5 \cdot 2 = 10$, т.е. 201 столб $\Rightarrow$ кол-во столбов с $x=5$ и без $x=2$ – $403-201 = 202$ столба; также уже посчитаны столбы с $x = 5 \cdot 101$ – столбы с числами 505 и 1515, и 1515 и 505 $\Rightarrow$ хороших столбов ещё $202-2 = 200$ столбов

Таким образом, всего хороших столбов мы насчитали $1009+2+8+200 = 1219 \Rightarrow$ нехороших столбов $2019-1219 = 800$

Ответ: 800 нехороших столбов.

7

№4.



1. Обозначим $\angle BAC = \angle BDA = \alpha$ и $\angle ABD = \beta$

2. Тогда $\angle AOD = 180^\circ - \alpha - \beta$ как внешний угол $\triangle AOB$ при вершине O.

3. Тогда $\angle OAD$ в $\triangle$-ке AOD $= 180^\circ - \alpha - \alpha - \beta = 180^\circ - 2\alpha - \beta$ по сумме углов $\triangle$-ка. $\Rightarrow$ $\angle BAD = 180^\circ - 2\alpha - \beta + \alpha = $ $= 180^\circ - \alpha - \beta$

4. Заметим, что $\angle DOC = 180^\circ - \alpha - \beta$ как смежный с $\angle AOD = \alpha + \beta$ $\Rightarrow$ $\angle BAD = \angle DOC = 180^\circ - \alpha - \beta$. +

5. $\triangle BAD = \triangle DOC$ (по I пр. - по двум ст. и углу между ними)

$AB = OD$ (по усл.)
$AD = OC$ (по усл.)
$\angle BAD = \angle DOC$ (из п. ④)
$\Rightarrow$ $\angle ADB = \angle OCD$ как соотв. эл. в равных $\triangle$-ах

6. $\angle BDA = \angle ACD$
$= \angle BAC$
$\Rightarrow$ $\angle ACD = \angle BAC$

7. $AB \parallel DC$, т.к. $\angle BAC = \angle ACD$ (накрест. л.), AC - секущая.

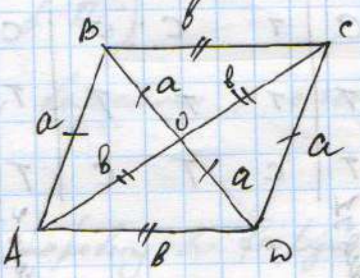
8. Из п. 7 $\Rightarrow$ ABCD - трапеция или пар-м.

Докажем, почему ABCD не может быть пар-мом.

Пусть ABCD - пар-м. Тогда по св-ву пар-ма

$AB = CD$, $BC = AD$;

$BO = OD$, $AO = OC$ $\Rightarrow$



$\Rightarrow AB = CD = BO = OD = a$,
$BC = AD = AO = OC = b$.

Тогда по неравенству

$\triangle BAD$ $AB + AD > BD$, т.е. $a + b > 2a \Rightarrow b > a$;

по неравенству $\triangle ABC$ $AB + BC > AC \Rightarrow a + b > 2b \Rightarrow a > b$.

Но $b > a$ при $a > b$ быть не может $\Rightarrow$ возникло противоречие $\Rightarrow$ ABCD - трапеция.

Ответ: ABCD - трапеция

7 5

№5. Рассмотрим все возможные варианты ~~ответов~~ цветов волос

		Пн₁	Вт	Ср	Чт	Пт₁	Сб	Вс	Пн₂	Вт	Ср	Чт	Пт₂	
III тип	I тип	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С	
IV тип	II тип	С	Т	С	Т	С	Т	С	Т	С	Т	С	Т	X
I тип	III тип	Т	Т	Т	Т	Т	Т	Т	Т	Т	Т	Т	Т	10 чел
II тип	IV тип	Т	С	Т	С	Т	С	Т	С	Т	С	Т	С	
		месяц 1				месяц 2			месяц 2				месяц 2	
		20 "да"				10 "да"			0 "да"					

Если бы Пн₁ и Пт₁ были в одном месяце, то все ответы совпали бы => Пн₁ в одном месяце, а Пт₁, Пн₂, Пт₂ в другом.

МЕСЯЦ

В 1-ом месяце Д.Р. у детей I-го и II-го типа (III и IV) => в Пт₁ они сказали "нет"

В ~~Пн₂~~ Пт₁ сказали "да" люди III-го / IV-го типов, у которых Д.Р. не в этих 2-х месяцах

В Пн₂ IV тип сказал "нет" => В Пт₁ они сказали "да" => у них Д.Р. в другой месяц => во 2-м месяце Д.Р. только у людей I III типа => их 10 ? почему? н.б.

В Пт₁ II-тип ответил "нет" => в Пн₂ они ответили бы "да", но таких ответов не было => людей

II-го типа 0чел.

Тогда III тип – 10чел (люди с Т волосами в $ПТ_2$)

I + IV типы – (20 – 10) = 10 чел (люди со С волосами в $ПТ_2$)

Значит людей со светлыми волосами и с темными в $ПТ_2$. было поровну.

Ответ: блондинов и брюнетов поровну во вторую пятницу.

2б Кзоб

№6.

В каждой игре разыгрывается 15 или 22 оч.

Пусть ~~есть~~ всего n команд. Тогда игр

$\frac{n(n-1)}{2}$ (т.к. в полном графе на n вершинах будет $\frac{n(n-1)}{2}$ ребер, где ~~вершины~~ вершины — команды, а ребра — игры)

Пусть a игр, где разыгрывается 15 оч (т.е. есть победитель и проигравший), b игр, где разыгрывается 22 оч. (т.е. была ничья.)

Тогда:

$15a + 22b = 1511$. Одно из решений: $a = 65$, $b = 8$, т.е.

~~$a = 65t$~~ решение уравнения в целых числах:

$$\begin{cases} a = 65 - 22t \\ b = 8 + 15t \end{cases}$$

t - параметр; т.к. a, b и n - ~~на~~ $\in \mathbb{N}$

$t < 3$.

Рассмотрим варианты $t=0$, $t=1$ и $t=2$.

$$a + b = \frac{n(n-1)}{2}.$$

$t=0$: $a = 65$, $b = 8$.

$$\frac{n(n-1)}{2} = 65 + 8$$

$n(n-1) = 146.$ 146 можно представить как

$1 \cdot 146$ и $2 \cdot 73$, но оба варианта

не подходят, т. к. множители должны отличаться на 1.

$t=1$: $a=43$, $b=23$;

$\frac{n(n-1)}{2} = 43+23$;

$n(n-1) = 132.$

$132 = 1 \cdot 132 = 2 \cdot 66 = 3 \cdot 44 = 4 \cdot 33 = 6 \cdot 22 = 11 \cdot 12.$

Подходит вариант, когда $n=12$, т.е 12 команд.

$t=2$: $a=21$, $b=38$;

$\frac{n(n-1)}{2} = 21+38$;

$n(n-1) = 118$

$118 = 1 \cdot 118$, $2 \cdot 59$ ⇓ оба варианта не подходят.

Тогда есть единственный вариант, когда 12 команд

Ответ: 12 команд.

+ 7б.