1	2	3	4	5	6	Σ	
7 Р.Ф	5	~~4~~ 7б	7 БАН	~~0~~ 7 К.Н.Н.	7 А.Т	26б	40б
7 РЕВ	5	~~7~~ 7	7 КИВ	~~9~~ 7 РЕВ	7 И.И.	26б	40б

М-9-301-02

ТЕТРАДЬ

для ______________________________

____

учени__________ класса__________

__________________ школы__________

____

____

№1

Ответ: Это выражение $= -3$.

Решение:

1) Осознаем, что попарные равенства симметричны относительно a, b, c, так что рассмотрим только одно из них:

$$a^2 - bc = b^2 - ac$$

$$a^2 - b^2 = bc - ac$$

~~$(a-b) = c(b-a)$~~ $a \neq b$, так ~~что~~ $a - b \neq 0$ и ~~$b-a \neq 0$~~

~~$1 = -c$~~

$$(a-b)(a+b) = c(b-a)$$

$$(a-b)(a+b) = -c(a-b) \qquad a-b \neq 0, \text{ т.к. } a \neq b$$

$$a+b = -c$$

Аналогично для $b^2 - ac = c^2 - ab$ и $c^2 - ab = a^2 - bc$.

2) из 1) $\Rightarrow$ $a+b=-c$, $c+a=-b$, $b+c=-a$,

тогда подставим:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = -1 - 1 - 1 = -3$$

7/8

№2

Ответ: 802 плохих столба (нехороших)

Решение:

1) Рассмотрим простые делители числа 2020:

$$\begin{array}{r|l} 2020 & 2 \\ 1010 & 2 \\ 505 & 5 \\ 101 & 101 \\ 1 & \end{array}$$

, а также рассмотрим общий случай этих значений:

$x+y=2020$. (x – 1 число, y – 2 число).

2) Теперь рассмотрим разложение на простые x и y: (α_i и β_i могут быть равны 0)

$x = d_1^{\alpha_1} \cdot d_2^{\alpha_2} \cdot \ldots$; Осознаем, что ~~хороших~~

$y = d_1^{\beta_1} \cdot d_2^{\beta_2} \cdot \ldots$; столбов для хороших

столбов верно: $(x, y) > 1$ ((a, b) – НОД a и b).

3) Пусть ~~α~~ e – произвольный простой делитель x, тогда $x+y \equiv_e 2020$, то т.к. $x \vdots e \Rightarrow$

$\Rightarrow y \equiv_e 2020$, пусть r – остаток 2020 при делении на e, тогда $y \equiv_e r$

4) Пусть L – кол-во простых делителей числа x, тогда ~~тогда~~ столб нехороший, если для всех L простых делителей x верно, что $r \neq 0$. (т.к. тогда $(x, y) = 1$)

5) Осознаем, при каких d_i — простой делитель x $r=0$, ну очевидно, ~~что их~~ из определения $r \Rightarrow 2020 \vdots d_i$, а из 1) $\Rightarrow d_i = 2, 5, 101$, т.е. при всех ~~все числа~~ пар x которые $\vdots 2 | 5 | 101$ (или) — такие столбы хорошие.

6) Т.к. всего столбов 2019 (очевидно) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ плохих столбов $= 2019 -$ хороших.

1) Найдем кол-во хороших столбов:

504 ← $\vdots 2$: $x = 2, 4, 8, \ldots, 1008$ (рассматриваем 1 левую половину)
100 ← $\vdots 5$: $x = 5, 10, \ldots, 1000$
9 ← $\vdots 101$: $x = 101 \ldots 909$

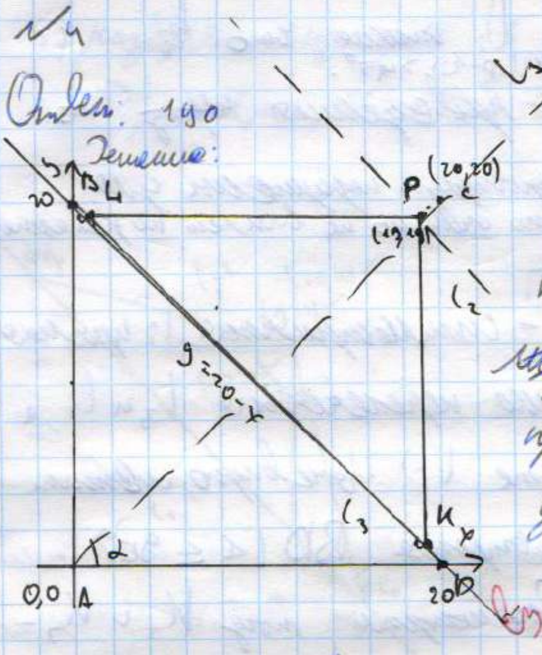
Но некоторые повторяются: половина из 2 группы и 5 из 3 уже посчитаны (очевидно), т.е. всего $504 + 100 + 4 = 608$ столбов. Плюс ещё столько же из 2 половины (если (x, y) — хороший, то и (y, x) — хороший), т.е. уже 1216. Остался только средний столб $(1010, 1010)$, он очевидно хороший, т.е. всего хороших 1217, а плохих соответственно ~~2020~~ $- 2019 - 1217 = 802$ (нехороших).

58

№4

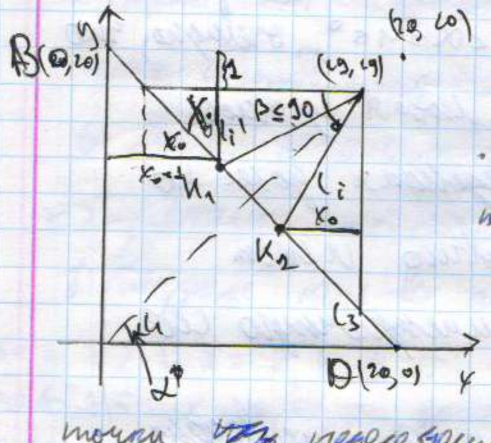
Ответ: 140

Решение:



1) Проведём l_1 прямую под $\angle\alpha = 45^\circ$, очевидно, что ~~[illegible]~~ любая прямая проведенная далее по условию имеет симметричную себе относительно l_1, которая также проведена, кроме l_2 (~~[illegible]~~ $l_2 \perp l_1$; (19,19) $\in l_2$) ~~и l_3 (l_3 - график $y=20-x$)~~ и l_1, т.к.: ~~$l_2 \parallel l_3 \perp l_1$, а l_1 - ось симметрии~~ $l_2 \perp l_1$, где l_1 ось симметрии и при этом l_1 ~~+~~ $\parallel l_3$, т.к. ABCD - квадрат где l_3 и l_1 - диагонали, всё это происходит, т.к. $45^\circ : 9^\circ$, т.е. l_1 также проведена.

2) разберём прямые l_i такие, что $\forall l_i$ $\angle(l_P, l_i) \le 90^\circ$ и $\angle(l_P, l_i) > 45^\circ$! ($l_i$ – проведённая ~~через~~ по условию прямая): (пропущу нарушение для упрощения понимания, это очевидно не влияет на решение)

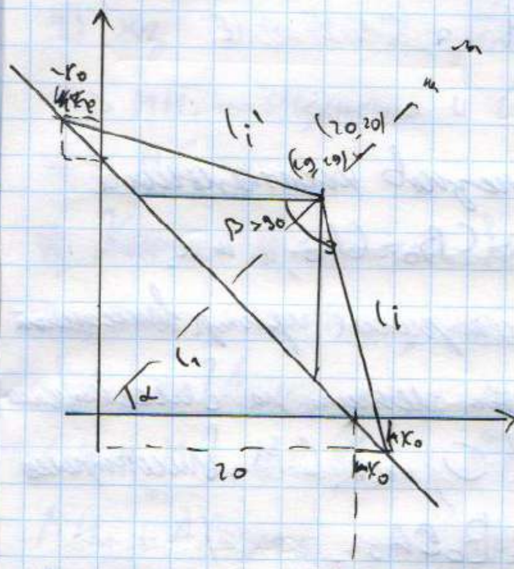


l_i' – симметричная l_i прямая. Точка пересечения l_3 и l_i, а также l_i' очевидно лежит на отрезке BD ($\angle \le 90^\circ$). Рассмотрим тогда K_1 и K_2 – точки ~~их~~ пересечения:

Очевидно, что т.к. декартовая система координат – прямоугольная, а $\alpha = 45^\circ$ =>

=> $K_1(x_1, y_1)$; $K_2(y_1, x_1)$, тогда также очевидно, что $x_0 = x_0$ (см рисунок), т.е. $x_1 = 19 - x_0$, а $y_1 = x_0 + 1$, т.е. $x_1 + y_1 = 20$ при любом β

3) разберём прямые l_i, такие, что ~~∡(...)~~ $\measuredangle(LP, l_i)$ (рис. 1) $> 90°$, но $\measuredangle(LP, l_i) < 135°$.

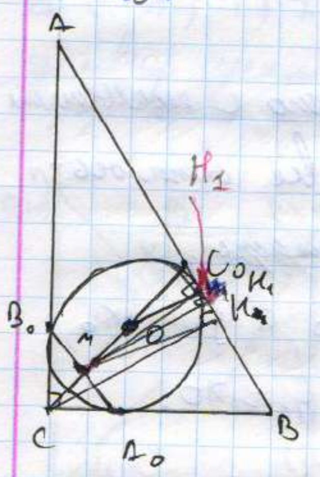


Оказалось, что с небольшими поправками всё осталось верно, но теперь $x_1 = 20 + x_0$, а $y_1 = -x_0$, т.е. $x_1 + y_1 = 20$.

4) Осталось всё посчитать в ~~углу от~~ направленном углу от $\beta > 45°$ до $\beta < 135°$: $54°$; $63°$; $72°$; $81°$; $90°$; $99°$; $108°$; $117°$; $126°$; ~~$135°$~~ — 9 углов, для которых есть симметричные, т.е. $9 \cdot 20 = 180$ шт, но еще есть $\beta = 45°$, для которого точка касания $(10, 10)$ (т.к. пересечение диагоналей в квадрате 20×20), т.е. $180 + 10 = 190$

№5

Дано:



Док-ть:

$MC_0 = MH$

Док-во:

1) Из отрезков касательных в $\triangle ABC \Rightarrow CB_0 = CA_0$, а т.к. CO – биссектриса (центр вписанной окружности лежит на биссектрисе) $\Rightarrow M \in CO$, т.к. CM биссектриса и медиана в р/б $\triangle B_0CA_0$

2) Опустим из M высоту в $\triangle MHC_0$, ~~пусть это H_1~~ пусть её основание – H_1, тогда из пропорциональных отрезков $\Rightarrow$

?

$\Rightarrow \dfrac{CM}{MO} = \dfrac{HH_1}{H_1C_0}$. ?

3) Докажем, что $CM = MO$, для этого докажем, что CA_0OB_0 – квадрат:

$B_0C = CA_0$ – отрезки касательных

$B_0O = OA_0$ – радиусы

$\angle CB_0O = \angle B_0CA_0 = \angle CA_0O = 90°$, т.к. CA и CB – касательные. $\Rightarrow CA_0OB_0$ – квадрат $\Rightarrow$

=> т.к. ~~B_0A_0~~ ~~$K \in M$~~ $M \in B_0A_0$ и $M \in CO$, а

также B_0OC_0 — квадрат => $CM = MO = B_0M' = A_0M$,

4) из 3) и 2) => $\frac{HH_1}{H_1C_0} = \frac{1}{1}$ => $HH_1 = H_1C_0$ =>

=> MH_1 — медиана и высота $\triangle MC_0H$ =>

=> $MC_0 = MH$.

★ Иных вариантов быть не может, т.к. 7б

теорема о пропорциональных отрезках

обязана выполняться, т.к. в любом случае

$CH \parallel MH_1 \parallel OC_0$ (~~OC_0~~ $OC_0 \perp AB$, т.к. AB — касат.,

$MH_1 \perp AB$ по построению,

$CH \perp AB$ по условию.).

№6

Ответ: Нет не может.

Решение:

1) Пойдём от обратного, предположим это возможно, тогда посмотрим, что происходит с очками всех остальных людей, когда мы убираем 1 человека. Очки Пети уменьшаются не более чем на 1, а очки остальных не увеличиваются, а т.к. при равенстве максимальных

очков чемпионы оба => У человека, кто
                              ровно на
стал чемпионом ~~на~~ 0,5 очков меньше
~~ровно~~ (т.к. чемпион был изначально 1)
2) ~~Это~~ Предположим, что кто-то не
проиграл Пете, тогда если мы его уберём,
то очки Пети ~~не уменьшатся~~ и
уменьшатся не более, чем 0,5, но очки
других людей не увеличились, а т.к. 0,5
минимальное деление и чемпион был ~~на~~
изначально 1 => Петя всё ещё чемпион =>
противоречие с условием => Петя победил всех.
3) Пусть всего $l+1$ участников, тогда у
Пети l очков, а у следующего после
него не более $l-1$ очков, если он всех
оставшихся победил, но ~~всё~~ $l-l+1=1>0,5$,
противоречие с 1), т.е. противоречие с
предположением => такого не может быть.

75

№3

Пример:

1 год:

	I	II	III	Всего
Пришло	10 ч	100 ч	1000 ч	1110 ч
% За	0%	80%	80%	
Кол-во За	0 ч	80 ч	800 ч	880 ч

Отношение: $\frac{880}{1110}$

2 год:

	I	II	III	Всего
Пришло	565 ч	35 ч	510	1110 ч
% За	20%	100%	100%	
Кол-во За	113 ч	35 ч	510 ч	658 ч

Отношение $\frac{658}{1110}$

Разность: $\frac{880-658}{1110} = \frac{222}{1110} = 0,2 = 20\%$ 7б