Министерство образования Омской области Бюджетное общеобразовательное учреждение Омской области «Многопрофильный образовательный Центр развития одаренности № 117»
« ___ » ________ 20__ г.
г. Омск ул. Андрианова, №4 телефон 22-33-70, 22-33-71

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2020/21 гг.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП, Омская область
МАТЕМАТИКА

Шифр

М-10-7

Титульный лист

ФИО участника (полностью)	Боярников Александр Алексеевич
Дата рождения (число, месяц, год)	17.01.2005
Муниципалитет	ОМСК
Полное наименование учебного заведения	БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ОМСКОЙ ОБЛАСТИ «МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР РАЗВИТИЯ ОДАРЕННОСТИ № 117»
Класс	10
ФИО учителя-наставника (полностью)	Чернявская Ирина Александровна
Полное наименование учебного заведения, в котором работает учитель-наставник	БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ОМСКОЙ ОБЛАСТИ «МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР РАЗВИТИЯ ОДАРЕННОСТИ № 117»

Дата проведения муниципального этапа: 20.11.2020

Подпись участника: Бояр

М-10-7

1	2	3	4	5	6	Σ
7	7	7	7	0	7	

№1

1) Возьмем кубик 3×3, рассмотрим центральный кубик 1×1, выберем любую его вершину и соединим 8 ~~из~~ кубиков 1×1, у которых есть эта вершина в 1 кубик 2×2, и получим 27 − 8 + 1 = 20 кубиков

Пример:

1 слой:

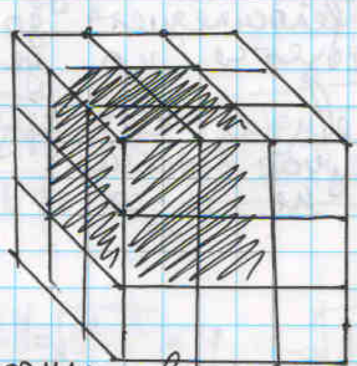
1	2	3
4	5	6
7	8	9

2 слой:

10		11
		12
15	14	13

3 слой:

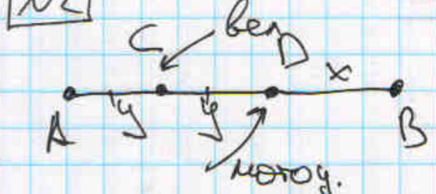
10		20
		19
16	17	18



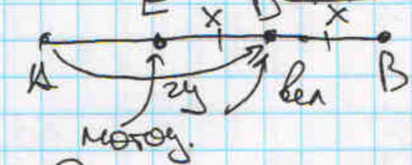
черным выделен единственный кубик 2×2

№2

через 1 час:



через еще 1 час



1) Пусть за 1 час мотоциклист проехал x, а велосипедист y, тогда расстояние между велосипедистом и мотоциклистом y

2) Тогда через еще 1 час мотоциклист и велосипедист проедут друг друга, велосипедист проедет еще y, а значит встанет на место мотоциклиста, а мотоциклист проедет еще x, таким образом расстояние от велосипедиста до мотоциклиста будет равно расстоянию от велосипедиста до точки B, что и требуется по условию

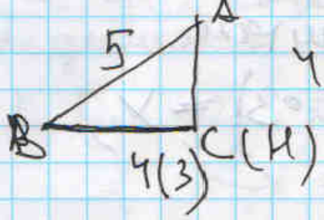
(очевидно, что других точек в данном случае больше не будет (подходящих под условие).)

№3

Есть 3 случая треугольника которые влияют на проведение высоты в треугольнике: (прямоугольный, остроугольный, тупоугольный)

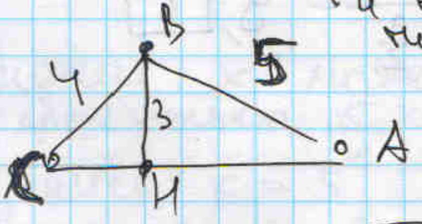
в случаях, когда ∠B не вершина, из которой определяет тип треугольника

1) Прямоугольный



$4 = BC = BH = 3$ — невозможно

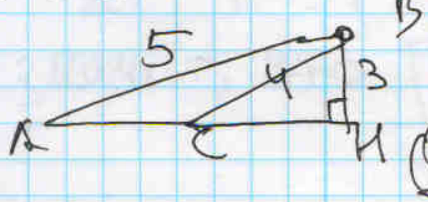
2) Остроугольный (тоже самое верно и если ∠B определяет тип треугольника)



$CH = \sqrt{4^2-3^2} = \sqrt{7}$

$HA = \sqrt{5^2-3^2} = \sqrt{16} = 4$ $\Rightarrow \boxed{AC = 4+\sqrt{7}}$

3) Тупоугольный



$AH = \sqrt{5^2-3^2} = 4$

$CH = \sqrt{4^2-3^2} = \sqrt{7}$ $\Rightarrow \boxed{AC = 4-\sqrt{7}}$

Ответ: $AC = \begin{matrix} 4+\sqrt{7} \\ 4-\sqrt{7} \end{matrix}$ | в зависимости от точки B и типа Δ

$\boxed{№4}$

$$m \circ n = \frac{m+n}{mn+4}$$

1) Рассмотрим случай, когда $n=2$

$m \circ 2 = \frac{m+2}{2m+4} = \frac{1}{2}$, т.е какое бы m мы не выбрали, если $n=2$, то результат операции $= \frac{1}{2}$

2) Тогда пусть мы посчитали

$$(\ldots((2020 \circ 2019) \circ 2018) \circ \ldots \circ 3) = x,$$

тогда $x \circ 2 = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} \circ 1 = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}+4} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{9}{2}} = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Ответ: $\frac{1}{3}$

№6

1) если в последовательности получилось 5, то до этого было:

$p_1 p_2 \dots p_{n-1}+1 = x$, где x имеет наибольший простой делитель $= 5 \Rightarrow$

2) $\Rightarrow$ а значит x может иметь в простых делителях только числа 2, 3, 5

$p_1 p_2 \dots p_{n-1} \underset{2}{\equiv} 0$, т.к. $p_1 = 2$

$\underset{3}{\equiv} 0$, т.к. $p_2 = 3$,

тогда $p_1 p_2 \dots p_{n-1}+1 \underset{2}{\equiv} 1 \Rightarrow \underset{2}{\not\equiv} 0$

$\underset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow \underset{3}{\not\equiv} 0$,

а значит x может содержать в себе только 5 как простой делитель,

а значит $x = 5^k$

$p_1 p_2 \dots p_{n-1}+1 = 5^k$

$p_1 p_2 \dots p_{n-1} = 5^k - 1$

$5^k \underset{4}{\equiv} (1)^k = 1$

~~5^k mod 4~~	
5	1
25	1

$\Rightarrow 5^k \underset{4}{\equiv} 1 \Rightarrow \boxed{5^k - 1 \underset{4}{\equiv} 0}$,

а значит, что $\boxed{p_1 p_2 \dots p_{n-1} \underset{4}{\equiv} 0}$

Докажем, что

$p_1 p_2 \dots p_{n-1} \equiv_4 0$ – невозможно,

для этого докажем, что в наборе может быть только одна 2

Заметим, что $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, тогда

пусть $p_{i\,(i>2)}$ тоже 2 (единственное четное простое)

тогда $p_1 p_2 \dots p_{i-1} + 1 \equiv_2 0$ (иначе очевидно 2 не может быть делителем)

$p_1 p_2 \dots p_{i-1} \equiv_2 1$,

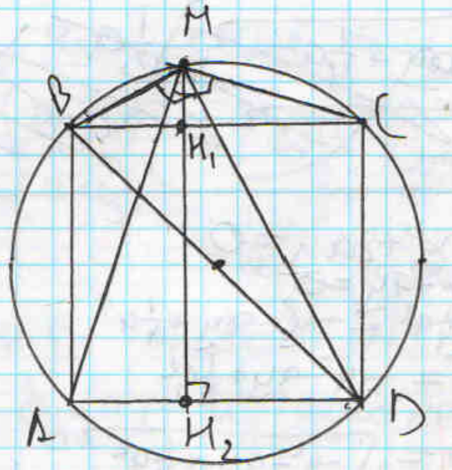
Но т.к. $p_1 = 2$, то $p_1 p_2 \dots p_{i-1} \equiv_2 0$

— ПРОТИВОРЕЧИЕ

Таким образом, если в наборе есть 5, то в наборе должно быть две 2, что неверно по доказанному выше, а значит и 5 в наборе быть не может

— ЧТД

№5



1) Опустим перпендикуляр из точки M на BC и AD, получим точки H_1, H_2

Пусть $MH_1 = y$ $\quad H_1C = x \quad AB=BC=CD=DA=a$

тогда $MH_2 = a+y \quad BH_1 = a-x$,

тогда

$BM = \sqrt{y^2+(a-x)^2}$

$MA = \sqrt{(a+y)^2+(a-x)^2}$

$MD = \sqrt{(a+y)^2+x^2}$

$MC = \sqrt{x^2+y^2}$

2) $ABMD$ − ~~описанный~~ впис. четырех-уг. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BAD + \angle BMD = 180$,

$\angle BAD = 90^\circ \Rightarrow \boxed{\angle BMD = 90^\circ} \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BMD$ − прямоуг. $\Rightarrow$

$\Rightarrow BD = \sqrt{BM^2+MD^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow BD^2 = BM^2 + MD^2$

$\Rightarrow 2a^2 = y^2+(a-x)^2+(a+y)^2+x^2$

$(=BD^2) \quad 2a^2 = y^2+a^2-2ax+a^2+2ay+y^2+x^2+\cancel{x^2}$

$2y^2+2x^2-2ax+2ay=0$

$\cancel{(x-\tfrac{1}{2}a)^2 = -2y^2+2ay+\tfrac{1}{4}a^2}$

$\cancel{x = \sqrt{-2y^2-2ay+\tfrac{1}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a}$

~~$x = \sqrt{-2y^2 - 2ay + \frac{1}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$~~

~~$x = \sqrt{-1(2y}$~~

$2y^2 + 2x^2 - 2ax + 2ay = 0$

$y^2 + x^2 - ax + ay = 0$

$x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = -y^2 - ay + \frac{1}{4}a^2$

$\left(x - \frac{1}{2}a\right)^2 = -y^2 - ay + \frac{1}{4}a^2$

$\left|x - \frac{1}{2}a\right| = \sqrt{-y^2 - ay + \frac{1}{4}a^2}$

$x = \sqrt{-y^2 - ay + \frac{1}{4}a^2} + \frac{1}{2}a$

x – рационально, когда $-y^2 - ay + \frac{1}{4}a^2$ – точный квадрат

√ $(-y)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (-y) = 0$

$y + y = 2y = 0$

только, когда $y = 0$, чего не может быть по условию

таким образом, получается, что и пары x, y только одно может быть рационально

Тогда вернемся к определениям отрезков:

$MC = \sqrt{x^2 + y^2}$

$BM = \sqrt{y^2 + (a-x)^2}$

$MA = \sqrt{(a+y)^2 + (a-x)^2}$

$MD = \sqrt{(a+y)^2 + x^2}$

Очевидно, что если a – рациональное:

то $(a-x)^2$ либо $(a+y)^2$ будут иррациональны, т.к. содержат $-2ax$ и $+2ay$ соответственно (в зависимости от того, что иррационально x или y),

а значит либо BM либо MD точно будут иррациональны

если a – иррационально:

то максимум одно из $(a-x)^2$ $(a+y)^2$ может быть рационально, ~~а значит MA~~ но в таком случае MA будет иррационально

(если оба иррациональны, то очевидно, что все и так верно)

– ЧТД