Министерство образования Омской области бюджетное общеобразовательное учреждение Омской области «Многопрофильный образовательный центр развития одаренности № 117»
«__» ________ 20__ г.
№ ________
г. Омск
ул. Андрианова, №4
телефон 22-33-70,
факс 22-33-...

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2020/21 гг.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП, Омская область
МАТЕМАТИКА

Шифр

М-11-69

Титульный лист

ФИО участника (полностью)	Смирнов Михаил Александрович
Дата рождения (число, месяц, год)	25.05.2003
Муниципалитет	ОМСК
Полное наименование учебного заведения	БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ОМСКОЙ ОБЛАСТИ «МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР РАЗВИТИЯ ОДАРЕННОСТИ № 117»
Класс	11 Б
ФИО учителя-наставника (полностью)	Чернявская Ирина Александровна
Полное наименование учебного заведения, в котором работает учитель-наставник	БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ОМСКОЙ ОБЛАСТИ «МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР РАЗВИТИЯ ОДАРЕННОСТИ № 117»

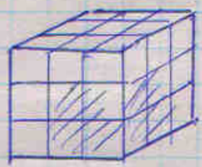
Дата проведения муниципального этапа: 20.11.2020

Подпись участника: ________

№1

М-11-69

1	2	3	4	5	6	Σ
7	7	6	1	7	7	35



1) Разрежем куб на 27 одинаковых кубиков $\Rightarrow$ 27 кубиков стало.

2) выделим куб $2\times2\times2$ внутри получившегося разрезания (итого 8 кубиков) и соединим их, получив куб большего размера

итого, из 8-ми кубиков получилось 1 $\Rightarrow$ -7 кубиков $\Rightarrow$

$\Rightarrow 27-7=20$ кубиков ■

№2

b, c, x_1, x_2

т.к. $x_1; x_2$ – корни, то

$x_1+x_2=-(-b)=b$

$x_1x_2=c.$ $\Rightarrow$ прогрессия:

$b \quad \overset{c}{b+d} \quad b+2d \quad b+3d$

$x_1+x_2; \; x_1x_2; \; x_1; \; x_2 \Rightarrow$

1) $x_1+x_2-x_1x_2=x_1-x_2=d$

2) $x_1x_2-x_1=(x_1+x_2-x_2):3=d$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 x_2 = -x_2 \\ x_1 x_2 - x_1 = \dfrac{x_1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_2 - x_1 x_2 = 0 \\ 3x_1 x_2 - 4x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2(2 - x_1) = 0 & (1) \\ x_1(3x_2 - 4) = 0 & (2) \end{cases}$$

если из (1) $x_2 = 0$, то из (2) $x_1 = 0$ — противоречие ($x_1 \neq x_2$)

если из (1) $x_1 = 2$, то из (2)-ого $x_2 = \frac{4}{3}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $b = \frac{10}{3}$ $c = \frac{8}{3}$:

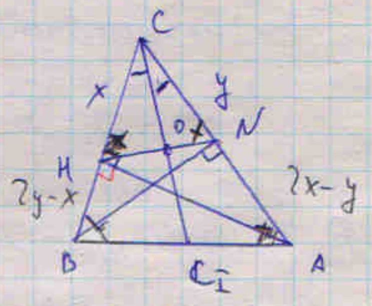
$\frac{10}{3}$; $\frac{8}{3}$; $\frac{6}{3}$; $\frac{4}{3}$ — верно. (и по виету есть корни) : можно разложить

$$\Sigma = \frac{14 + 14}{3} = \frac{28}{3}$$

Ответ: $\frac{28}{3}$

76

53



Дано: $CO = \frac{C_1O}{2}$; CC_1 – бисс,
AH; BN – высоты
$HN \cap CC_1 = O$

Найти: $\angle C$.

Решение:

1) $\exists$ т. $CH = x$; $CN = y$, тогда,
р/у $BHNA$ – ~~описанный~~ вписанный (на BA смотрят 2 ~~равных~~ прямых угла)
то $\angle CHN = \angle CAB$ и $\angle CNH = \angle CBA$, тогда обоснование?
$\triangle COH \sim \triangle CAC_1$? и $k = 2 = ?$ $\frac{C_1O}{CO} \Rightarrow$ Нет обоснования
$\Rightarrow NA = 2x - y = CA - CN = 2CH - CN$, аналогично
$HB = 2y - x$

2) в $\triangle HCA$ $\angle H = 90°$, а $\frac{CA}{CH} = (\cos\angle C)^{-1} =$
$= \frac{2x - y + y}{x} = 2 \Rightarrow \angle C = \arccos\frac{1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle C = 60°$ (острый)

Ответ: $60°$

№5

Д вс возможные варианты 3-х наименьших делителей числа N

1) 1 всегда входит.

2) 2-ой делитель $\in \mathbb{P}$ (множество простых чисел)

3) 3-ий делитель или $\in \mathbb{P}$ и $> p$, или же $= p^n$, т.к. если он не простой, то кратен простым, меньшим его, но эти простые уже были сами $= p$.

Итого:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I)} & 1;\ p;\ p^n \\ \text{II)} & 1;\ p;\ t \end{array}\right\} p;\ t \in \mathbb{P}$$

I $\quad 1+p+p^n = N \vdots p$ — невозможно, т.к.

$$1+p+p^n \underset{p}{\equiv} 1+0+0 \underset{p}{\equiv} 1$$

II $\quad 1+p^2+t^2 = N \quad \vdots p;\ \vdots t$

1) Т.к. $p<t$, то если $p=2$, то

$5+t^2 = N \quad \not\vdots\, 2;\ \vdots t$.

$5+t^2 \vdots t \Rightarrow 5 \vdots t \Rightarrow t=5.\ (t \neq 1)$

$1+2^2+5^2=30$; но $30 \vdots 3$ – противоречие: $(3<5)$

2) если $p=3$, то $1+3^2+t^2 \underset{3}{\equiv} 1+0+t^2 \underset{3}{\equiv}$

$\underset{3}{\equiv} 1+0+1 \underset{3}{\equiv} 2 \not\vdots 3$, т.к. $t \in \mathbb{P}$ и $\underline{\geq 3}$ $\Rightarrow$

$t^2 \underset{3}{\equiv} 1$. (т.о.)

3) если $p>3$, то и $t>3$ $\Rightarrow$

$p^2+t^2+1 \underset{3}{\equiv} 1+1+1 \underset{3}{\equiv} 0$ $\Rightarrow$ $N \vdots 3$, – противоречие.

+

Ответ: невозможно привести такое число.

№6 Заметим, что коэфф. $(x+1)^k$ образуют последовательность C_n^i, $i \in [0; n]$, которую можно заметить в Δ-ке Паскаля. Заметим, что в Δ-ке паскаля так же (ф-ла $C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^{k}=C_n^k$) любой не крайний член n равен сумме a и b, где a и b находятся сверху от n

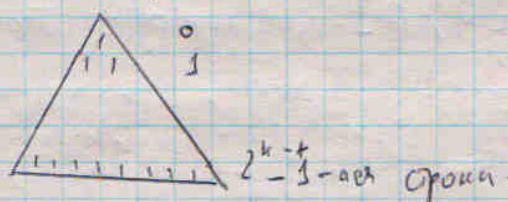
$n=a+b$ (свойство -1)

Так, представим теперь все числа в т-ке Паскаля только как их остатки от деления на 2: свойство 1 - сохранится. Так первые строки теперь выглядят:

1	0-строка
1 1	1-строка
1 0 1	2-ая строка
1 1 1 1	3-я строка
1 0 0 0 1	
. . . . .	

Заметим так же, что все единички (фундамент) находятся только в 2^n-1-ох строках, где $n \in N$ т.к. база для $n = 0, 1$; есть: смотри рисунок, а так же переход:

пусть для $n = k$ - верно, тогда: последний фундамент находится на 2^k-1-ой строке:



Рассмотрим следующие 2^k строк:

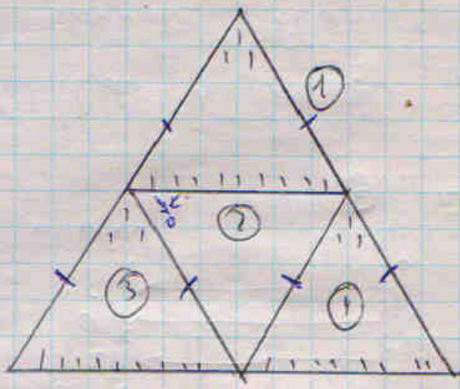


рис. 1.

Заметим, что в Δ-ке 2 нет ни одной 1-цы,
т.к. изначально: вверху все 0, а затем:
$0+0=0 \rightarrow$ ~~втор.~~ следующая строка также 0,
а вот Δ 3 и Δ 4 равны Δ 1 по способу
построения: по краям 1-цы (по бокам · × (отмечены одной чертой)), а каждый нижний равен
двум вышестоящим по $\boxed{\text{Св-ву } 1}$, но тогда
выше 2^n-1+2^n-ой строки есть хоть-бы 1 часть,
а в 2^n-1+2^n-ой строке все 1-цы т.к.
$2^n-1+2^n = 2^{n+1}-1$ -ая строка

Свойство-2: Δ 1 $\simeq$ Δ 3 и Δ 4, а Δ 2 - пустой. для $\forall n$ (по рис. 1)

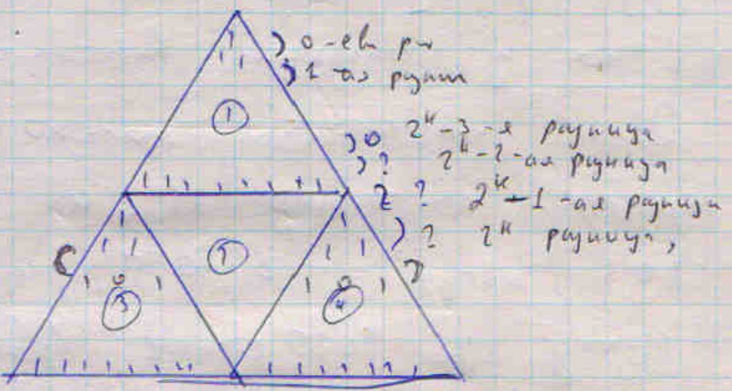
Теперь 4 разниц между суммами единиц в каждой строчке и предыдущей:

Для начала 1-ые 8 строк:

	строка	разница	
1	0		
1 1	1	1	0
1 0 1	2	0	1
1 1 1 1	3	2	2
1 0 0 0 1	4	−2	3
1 1 0 0 1 1	5	+2	4
1 0 1 0 1 0 1	6	0	5
1 1 1 1 1 1 1 1	7	+4	6

Заметим, что разницы 0 отстоят друг от друга на 4-ре (через 3 разницы) разницы. Докажем, что 0 ~~такие~~ через 4-ре разницы точно встретятся или, что каждая разница $\equiv_4 1$ равна 0. Пусть для некой верхушки Δ-ка Паскаля вплоть до фундамента это верно (Δ 1), тогда в Δ-ках 3 и 4 по св-ву 2 0-ли на тех же местах и тогда суммарно через 4-ре в Δ-ках 3 и 4 опять стоит разница = 0+0 = 0, в Δ-ке 2 стоит 0 => он не влияет на разницу единиц.

докажем, что при переходе сохраняется шаг ≥ 4.



раз последняя строка ~~из~~ 1-ого Δ-ка равна по номеру 2^k-1, то по mod 4 она же равна -1 $(k>2)$, но тогда это будет уже 2^k-2-я разница $\underset{4}{\equiv} 2$ но тогда предыдущая разница $\underset{4}{\equiv} 1 \Rightarrow = 0$. Тогда

2^k-1-ая разница — неизвестна

2^k-1+1-ая разница = ~~неизвестная~~ удвоенной 0-евой разнице, но вот уже 2^k+1 ая разница — ~~сумма~~ удвоенной 1 от разнице $= 0 \cdot 2 = 0$, а $2^k+1 \underset{4}{\equiv} 1$.

Ищем разницу между 2021 строчкой и 2020 строчкой: она является 2020 разницей.

Тогда следующая рядица — точно 0.

Заметим, что из индукции вытекает, что 0-ли получаются только при переходе от пар 11, и ниже 101, тогда в 2020 рядице кол-во единиц у 2020 строчке вдвое меньше кол-ва единиц в 2021 строчке опять-таки из-за индукции! 0 получается только от следующих узоров

рядом 4k-ая { 1 0 0 0 ... 1 ...
1 1 0 0 ... 1 1 ...

рядом 4k+1-ая { 1 0 1 0 ... 1 0 1 ...

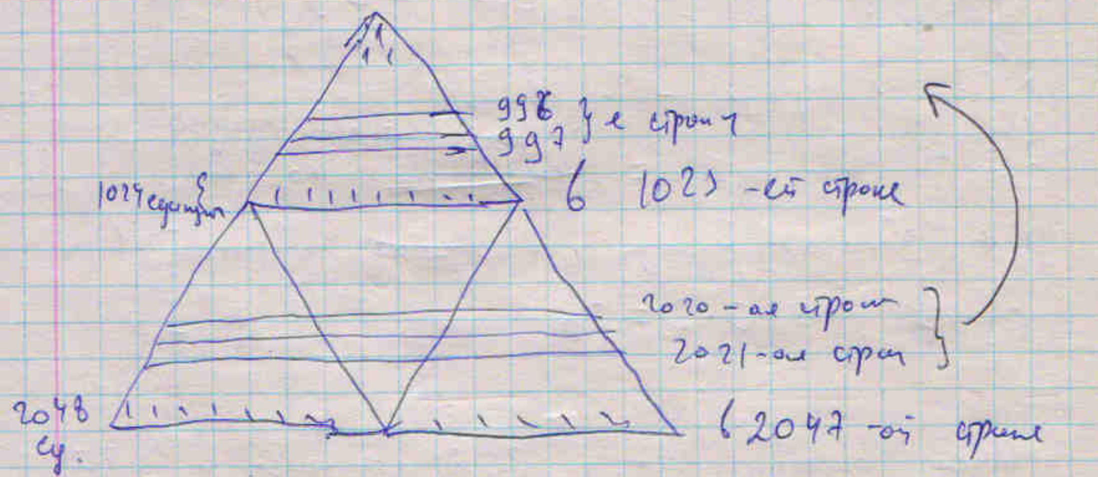
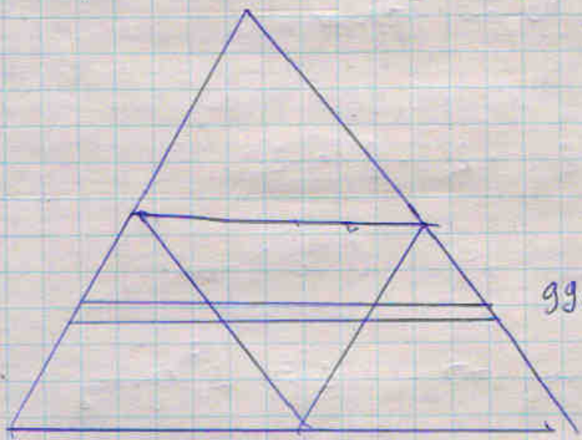


рис. 2.

Тогда по рис. 2. понятно, что кол-во ед.

в 2020-ой строке = 2 · кол-во единиц в

996 строке.



996-я стр

Δ = 27

1023

в 996-ой строке = 2 · кол-в в 512 − 27 =

= 484-ой строке.

в 484-ой строке = 2 кол-в 256 − 1 − 27 =

= 228-ой строке

в 228-ой строке = 2 · кол-во в 128 − 1 − 27 =

= 100-ой строке

в 100-ой строке = 2 · кол-в в 64 − 1 − 27 = 36-ой в 36-ой = 7, т.к. в в 32 − 1 − 27 = 4-ой строке

= 2-м. единицам.

Итого: в 2020-ой строке =

$$\underset{(4)}{2} \cdot \underset{(36)}{2} \cdot \underset{(100)}{2} \cdot \underset{(728)}{2} \cdot \underset{(789)}{2} \cdot \underset{(996)}{2} \cdot \underset{(2020)}{2} =$$

$= 2^7$ единиц $\Rightarrow$ в 2021-ой

$2^7 \cdot 2$ единиц $\Rightarrow$ $\Delta = 2^7$ единиц

Ответ: у Васи на 2^7 единиц больше.

+

№4

Было:

А	В
$p_a + p_б$	$p_a - p_б$, 1 год

$\Downarrow$

$$\frac{1,375}{200} p_a + \frac{\cancel{3}\,1,375}{200} p_б \;\Bigg|\; \frac{1,\cancel{5}\cdot 1,375}{100} p_a + \frac{1,375}{200} p_б$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$\frac{1,375}{200} p_a - \frac{1,375}{200} p_б \text{ (деньги)} \;\Bigg|\; -\frac{1,375}{200} p_a + \frac{1,375}{200} p_б$$

$$\left(\frac{\left(\frac{1,375}{100}\right)^2 \cdot p_a}{2} + \left(\frac{1,375}{100}\right)^2 \frac{3}{2} p_b + \frac{1,375}{2} p_a - \frac{1,375}{2} p_b \right) = \left(\frac{(1,375)^2 p_a \cdot \frac{3}{2} + (1,375)^2 p_b \cdot 2}{2} + \frac{1,375}{2} p_b - \frac{1,375}{2} p_a \right)$$

$-p_a - p_b$?

$1,5$ ·

$$\frac{(1,375)(1,375+1)}{2} p_a + \frac{(1,375)(1,375 \cdot 3 - 1)}{2} p_b = \frac{3}{2}\left(\frac{1,375 \cdot (1,375 \cdot 3 - 1)}{2} p_a + \frac{1,375 \cdot (1,375+1)}{2} p_b \right)$$

$$\left(\frac{1,375 \cdot (1,375+1)}{2} - \frac{3}{2} \frac{(1,375)(1,375 \cdot 3 - 1)}{2} \right) p_a = \left(\frac{3}{2} \frac{1,375 \cdot (1,375+1)}{2} - \frac{1,375 \cdot (1,375 \cdot 3 - 1)}{2} \right) p_b$$

$$2(1,375+1) \cdot 1,375 - 3(1,375 \cdot 3 - 1) \cdot 1,375) p_a = 3 \cdot 1,375 \cdot (1,375+1) - 2 \cdot 1,375 (1,375 - 1) p_b.$$

$\cdot 1,5 \cdot$

...ион)