ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2020/21 гг.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
МАТЕМАТИКА
10 КЛАСС

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ

Максимальное количество баллов- 42.
Время выполнения работы – 240 минут.

1. Разрежьте куб на 20 кубиков (не обязательно одинаковых).

Решение. В кубе 3х3х3 объединим 8 кубиков 1х1х1 в один кубик 2х2х2, получится 27-8+1=20 кубиков.

Критерии проверки: Любой верный пример (не обязательно с чертежом) – **7 баллов**, в остальных случаях – **0 баллов**.

2. В полдень из пункта А в пункт В выехал велосипедист. Одновременно из В в А по той же дороге выехал мотоциклист. Через час велосипедист находился на полпути от А до мотоциклиста. Через какое время после выезда из А велосипедист окажется на полпути от мотоциклиста до В, если известно, что мотоциклист и велосипедист не успели доехать до пунктов назначения? (Скорости транспортных средств постоянны).

Ответ. Через 2 часа.

Решение. Пусть скорость велосипедиста x, а скорость мотоциклиста y. Тогда путь АВ=$2x+y$. Искомое время обозначим за t. Тогда $2(2x+y-tx)=ty$, откуда получаем $t=2$.

Критерии. Верное решение – **7 баллов**, в остальных случаях – **0 баллов**.

3. В треугольнике даны две стороны $AB=5$, $BC=4$ и высота $BH=3$. Найдите сторону AC.

Решение. Заметим, что есть два случая: точка Н лежит на стороне АС или на ее продолжении. Применяя теорему Пифагора для треугольников АВН и ВСН, получаем АС=$4+\sqrt{7}$ (в первом случае) или АС=$4-\sqrt{7}$ (во втором случае).

Критерии проверки: Верное решение – **7 баллов**, разобран один случай – **3 балла**, в остальных случаях – **0 баллов**.

4. Для положительных чисел m и n введем новую операцию $m \circ n = \dfrac{m+n}{mn+4}$.

Найдите $((\ldots((2020 \circ 2019) \circ 2018) \circ \ldots \circ 1)$.

Ответ: 1/3.

Решение. Достаточно заметить, что $x \circ 2 = \dfrac{x+2}{2x+4} = \dfrac{1}{2}$. Тогда исходное выражение станет равным $\frac{1}{2}\circ 1=\dfrac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}+4}=\frac{1}{3}$.

Критерии проверки: Верное решение – **7 баллов**, в остальных случаях – **0 баллов**.

5. В окружность вписан квадрат, точка M – произвольная точка окружности, отличная от вершин квадрата. Докажите, что все четыре расстояния от M до вершин квадрата не могут быть одновременно рациональными числами.

Решение: Пусть данный квадрат – ABCD и точка M лежит на дуге AB. Заметим, что стороны квадрата – это хорды, опирающиеся на дуги, равные 90°. Значит, вписанные углы AMD и BMC равны по 45°. Обозначим расстояния от M до вершин A, B, C, D через *a, b, c, d* соответственно, а сторону квадрата через *x*. Тогда из треугольников AMD и BMC по теореме косинусов:

$x^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos 45°=a^2+c^2-\sqrt{2}ac$ и

$x^2=b^2+d^2-2bd\cdot\cos 45°=b^2+d^2-\sqrt{2}bd.$ Далее, приравняв правые части, получим $\dfrac{a^2+c^2-b^2-d^2}{ac-bd}=\sqrt{2}.$ Очевидно, что если все расстояния были бы рациональными, то последнее равенство было бы неверно.

Критерии проверки: Верное решение – **7 баллов**, в остальных случаях – **0 баллов**.

6. Последовательность простых чисел p_1, p_2, …., p_n, … строится так: $p_1=2$, а при $n>1$ число p_n – это наибольший простой делитель числа $p_1p_2\ldots p_{n-1}+1$. Докажите, что в этой последовательности нет числа 5.

Решение. Поскольку $p_1=2$, а $p_2=3$, число $p_1p_2\ldots p_{n-1}+1$ не делится ни на 2, ни на 3. Поэтому пятерка может возникнуть только в случае, когда $p_1p_2\ldots p_{n-1}+1=5^m$. Но 5^m-1 делится на 4, а $p_1p_2\ldots p_{n-1}$ нет.

Критерии проверки: Верное решение – **7 баллов**, в остальных случаях – **0 баллов**.