ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2020/21 гг.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
МАТЕМАТИКА
11 КЛАСС

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ

1. Разрежьте куб на 20 кубиков (не обязательно одинаковых).
Решение. В кубе 3х3х3 объединим 8 кубиков 1х1х1 в один кубик 2х2х2, получится 27-8+1=20 кубиков.

   Критерии проверки. Любой верный пример (не обязательно с чертежом) – **7 баллов**, в остальных случаях – **0 баллов**.

2. Пусть x_1, x_2 - корни уравнения $x^2 - bx + c = 0$ $(x_1 \neq x_2)$. Известно, что числа b, c, x_1, x_2 образуют в данной последовательности арифметическую прогрессию. Найдите сумму этих четырех чисел.
Решение: Используя теорему Виета и свойство арифметической прогрессии, условия задачи перепишем в виде $2x_1 + x_2 = 2x_1x_2$, $x_2 + x_1x_2 = 2x_1$. Отсюда находим, что $x_2(x_1 - 2) = 0$. Корень $x_2 = 0$ не подходит (т.к. тогда $x_1 = x_2 = 0$), значит $x_1 = 2$. Тогда $x_2 = \frac{4}{3}$, а искомая сумма равна $\frac{10}{3} + \frac{8}{3} + 2 + \frac{4}{3} = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}$.

   Критерии проверки: Верное решение – **7 баллов**, решение в целом верное, но неверный ответ из-за арифметической ошибки – **5 баллов**, в остальных случаях – **0 баллов**.

3. Найдите угол при вершине C остроугольного треугольника ABC, если известно, что отрезок HN, соединяющий основания высот AH и BN, пересекает биссектрису угла при вершине C в ее середине.
Решение: Заметим, что треугольник *HCN* подобен треугольнику *ABC* с коэффициентом $\cos\gamma$ ($\gamma = \angle ACB$) в силу равенств $\frac{HC}{BC} = \cos\gamma = \frac{NC}{BC}$.
Далее, биссектриса угла при вершине C в ΔABC является также биссектрисой в ΔHNC, причем отношение длин последней к первой по условию равно $\frac{1}{2}$. Поскольку в подобных треугольниках длины соответствующих элементов относятся как коэффициенты подобия, то $\cos\gamma = \frac{1}{2}$. Отсюда искомый угол $\gamma = 60°$.

Критерии проверки: Верное решение – **7 баллов**, в остальных случаях – **0 баллов**.

4. Бизнесмены Петров и Васильев в начале 2020 года приобрели одинаковые пакеты акций компаний A и B (одинаковое количество акций A и одинаковое количество акций B). Через год Петров продал Васильеву половину своих акций компании A, а Васильев продал Петрову половину своих акций компании B. Еще через один год прибыль за 2 года у Васильева оказалась в 1,5 раза меньше, чем у Петрова. Во сколько раз больше стала стоимость имеющегося пакета акций Петрова, чем пакета акций Васильева, если известно, что стоимость акций обеих компаний в конце каждого года увеличивалась на 37,5% ?

Ответ: в $2\frac{1}{18}$ раза.

Решение. Выпишем прибыли каждого в общем виде. Пусть a и b – суммы, потраченные на покупку акций компаний A и B соответственно, p – процент увеличения стоимости акций, k=p/100.

Рассмотрим сначала Петрова. Во-первых, акции на сумму $\frac{a}{2}+b$ он продержал 2 года, значит, прибыль за них составила $\left(\frac{a}{2}+b\right)\cdot(k+1)^2-\left(\frac{a}{2}+b\right)=\left(\frac{a}{2}+b\right)\cdot k(k+2)$. Во-вторых, акции, на сумму $\frac{a}{2}$, которые потом продал Васильеву за $\frac{a}{2}\cdot(1+k)$, он продержал один год и прибыль составила $\frac{a}{2}\cdot k$. И в-третьих, он купил акции у Васильева за $\frac{b}{2}\cdot(1+k)$, продержал один год и прибыль составила $\frac{b}{2}\cdot(1+k)\cdot k$. Итого прибыль составила $P_П=\left(\frac{a}{2}+b\right)\cdot k(k+2)+\frac{a}{2}\cdot k+\frac{b}{2}(1+k)k$.

Аналогично, можно выписать прибыль Васильева: $P_B=\left(a+\frac{b}{2}\right)\cdot k(k+2)+\frac{b}{2}\cdot k+\frac{a}{2}(1+k)k$. Значит, $P_П=1{,}5\cdot P_B$. Разделив обе части на k≠0 и упростив данное уравнение, получим $(7a-3b)k=b-9a$. Подставляя значение $k=3/8$, находим $17b=93a$.

Далее, через 2 года у Петрова стоимость всех акций стала равна $\left(\frac{a}{2}+\frac{3b}{2}\right)\cdot(1+k)^2$, а у Васильева $\left(\frac{3a}{2}+\frac{b}{2}\right)\cdot(1+k)^2$. Таким образом, отношение стоимостей равно $\frac{a+3b}{3a+b}=\frac{a+3\cdot 93a/17}{3a+93a/17}=\frac{296}{144}=2\frac{1}{18}$.

Критерии проверки: Верное решение – **7 баллов**, решение в целом верное, но неверный ответ из-за арифметической ошибки – **5 баллов,** верно получено соотношение сумм, вложенных в акции (модель и анализ прибылей) – **3 балла**, верно составлено уравнение относительно прибылей, но решение не закончено или неверно – **2 балла**, правильно выражена прибыль одного из участников – **1 балл**, в остальных случаях – **0 баллов**.

5. Существует ли натуральное число, равное сумме квадратов трех своих наименьших различных делителей?
Ответ: нет.

Решение. Заметим, что квадрат любого натурального числа n либо делится на 3 (если n кратно 3), либо дает при делении на 3 остаток 1 (если n не кратно 3). Рассмотрим два варианта: данное число не делится на 3 или делится на 3. В первом случае ни один из делителей данного числа не делится на 3, а значит, их квадраты дают при делении на 3 остаток 1. Но тогда сумма квадратов трех его любых делителей делится на 3. Во втором случае, очевидно, что два из трех наименьших делителей – это числа 1 и 3. Пусть d – третий из наименьших делителей. Тогда сумма квадратов трех этих делителей при делении на 3 дает либо остаток 1 (если d кратен 3), либо остаток 2 (если d не кратен 3).

Итак, в обоих случаях данное число не может быть равно сумме квадратов трех своих наименьших различных делителей.

Критерии проверки: Верное решение – **7 баллов**, при анализе остатков по подходящему модулю рассмотрены не все случаи – **не более 4 баллов**, в остальных случаях – **0 баллов**.

Замечание: Если потеряны случаи при рассмотрении остатков при делении на число не равное 3, то промежуточные баллы следует ставить только, если пробелы в решении можно «закрыть» путем несложных рассуждений.

6. Петя возвел в степень выражение $(x+1)^{2020}$ и привел подобные члены, а Вася сделал то же самое для выражения $(y+1)^{2021}$. Затем каждый посчитал число нечетных коэффициентов у себя в разложении. У кого из них получилось больше и на сколько?

Ответ: у Васи больше на 2^7.

Решение. Для начала рассмотрим выражение вида $(x+1)^{2^n}$ для произвольного натурального n, т.е. выражения $(x+1)^2, (x+1)^4, (x+1)^8, \ldots$ Нетрудно заметить, что в их разложении будет только два нечетных коэффициента (у первого и последнего слагаемых коэффициенты равны 1).

Очевидно, что при перемножении двух выражений $(x+1)^{2^n}$ и $(x+1)^{2^k}$, $n>k$, образуются ровно 4 слагаемых с нечетными коэффициентами: это $x^{2^n+2^k}, a\cdot x^{2^n}, b\cdot x^{2^k}$ и 1, для некоторых нечетных a и b. Аналогично, при умножении трех таких выражений получится 8 слагаемых с нечетными коэффициентами, для четырех – 16 слагаемых и т.д.

Используем эти замечания для выражений Пети и Васи. Представим 2020 и 2021 как суммы степеней двойки: 2020 = 1024+512+256+128+64+32+4, 2021 = 1024+512+256+128+64+32+4+1.

Тогда

$$(x+1)^{2020}=(x+1)^4(x+1)^{32}(x+1)^{64}(x+1)^{128}(x+1)^{256}(x+1)^{512}(x+1)^{1024}$$

$$(x+1)^{2021}=(x+1)(x+1)^4(x+1)^{32}(x+1)^{64}(x+1)^{128}(x+1)^{256}(x+1)^{512}(x+1)^{1024}$$

Значит, у Пети получится 2^7 слагаемых с нечетными коэффициентами, а у Васи – 2^8.

Критерии проверки: Верное решение – **7 баллов**, в остальных случаях – **0 баллов**.