



ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2020/21 гг.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
МАТЕМАТИКА
9 КЛАСС

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ

Максимальное количество баллов- 42.
Время выполнения работы – 240 минут.

1. Нарисуйте на клетчатой бумаге два многоугольника одинаковой площади, периметры которых отличаются в 1,5 раза. Подтвердите правильность примера вычислениями.

Решение: Годаются, например, прямоугольники 1×8 и 2×4 . Периметр первого равен 18, а второго – 12.

Критерии проверки: Любой верный пример с проверкой – **7 баллов**, в остальных случаях – **0 баллов**.

2. В кофемашине есть две кнопки «кофе» и «молоко». Если нажать эти две кнопки одновременно, то за 15 секунд получится кружка напитка, содержащего 25% молока. Через сколько секунд после нажатия кнопки «кофе» следует нажать кнопку «молоко» для того, чтобы получилась такая же кружка напитка, но содержащая 20% молока? (Кофемашинa всегда наполняет кружку до краев, кофе и молоко при нажатых кнопках наливаются одновременно независимо друг от друга).

Ответ: 4 секунды.

Решение: Так как при одновременном наполнении кружки кофе и молоко составляют соответственно 75% и 25%, то молоко наливается в 3 раза медленнее, чем кофе. Для получения 20%-го напитка: после нажатия кнопки «молоко» кофе также нальется втрое больше, чем молока, а значит 60%, следовательно, до нажатия кнопки «молоко» кофе составило 20% кружки. Поскольку 75% кофе набирается за 15 секунд, тогда легко посчитать, что 20% кофе набирается за 4 секунды. То есть кнопку «молоко» следует нажать через 4 секунды.

Критерии проверки: Верное решение – **7 баллов**, решение в целом верное, но неверный ответ из-за арифметической ошибки – **5 баллов**, получено соотношение скоростей наполнения кофе и молока – **1 балл**, только правильный ответ с проверкой – **1 балл**, в остальных случаях – **0 баллов**.



ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2020/21 ГГ.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
МАТЕМАТИКА
9 КЛАСС

3. Найдите сумму всех действительных корней уравнений $x^2 - 20x + q = 0$, где q принимает все нечетные значения из промежутка от 1 до 2020.

Ответ: 1000.

Решение: Дискриминанты соответствующих квадратных уравнений имеют вид $D = 400 - 4q$, т.е. они неотрицательны только для q от 1 до 100. Кроме того, q должно быть нечетным, следовательно, D не может быть равен 0. Значит, все уравнения имеющие корни, имеют по 2 различных корня, сумма которых равна 20 (по теореме Виета). Таких уравнений ровно 50 (количество нечетных чисел от 1 до 99). Значит, сумма всех корней уравнений равна $50 \cdot 20 = 1000$.

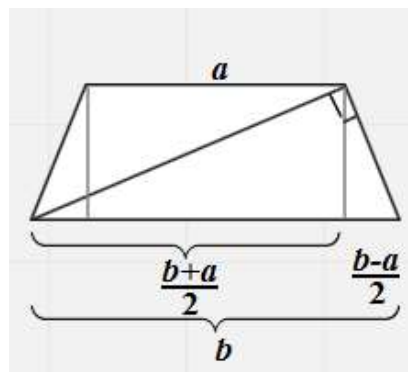
Критерии проверки: Верное решение – 7 баллов, решение в целом верное, но неверно посчитано количество уравнений, имеющих корни – 3 балла, в остальных случаях – 0 баллов.

4. В равнобедренной трапеции диагональ перпендикулярна боковой стороне. Докажите, что высота трапеции меньше ее средней линии.

Решение: Пусть a и b – меньшее и большее основания соответственно, h и m – высота и средняя линия трапеции соответственно. Тогда отрезки, на которые делится большее основание высотой, равны $\frac{b-a}{2}$ и $\frac{b+a}{2}$ (см. рисунок). В прямоугольном треугольнике высота из прямого угла равна среднему геометрическому отрезков гипотенузы, то есть

$h = \sqrt{\frac{b-a}{2} \cdot \frac{b+a}{2}}$. Очевидно, что для положительных a и b выполняется

$$\frac{b+a}{2} > \frac{b-a}{2}, \text{ значит } h = \sqrt{\frac{b-a}{2} \cdot \frac{b+a}{2}} < \sqrt{\left(\frac{b+a}{2}\right)^2} = \frac{b+a}{2} = m.$$



Критерии проверки:



ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2020/21 ГГ.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
МАТЕМАТИКА
9 КЛАСС

Верное решение – **7 баллов**, в остальных случаях – **0 баллов**.

5. Для натуральных чисел x, y, z , больших 1, выполняется равенство $xuz - xy - 3xz - 2yz + 3x + 2y + 6z = 39$. Чему может быть равна сумма $x + y + z$? Найдите все варианты и докажите, что других нет.

Ответ: 21 или 41.

Решение. Сгруппируем слагаемые и вынесем общие множители:

$$xy(z-1) - 3x(z-1) - 2y(z-1) + 6(z-1) = 39 - 6,$$

$$(z-1)(xy - 3x - 2y + 6) = 33,$$

$$(z-1)(x(y-3) - 2(y-3)) = 33,$$

$$(z-1)(y-3)(x-2) = 1 \cdot 3 \cdot 11.$$

Так как числа x, y и z натуральные, не меньшие 2, то каждая скобка из левой части должна принимать положительное значение. В силу простоты чисел 3 и 11, получаем, что последнее равенство возможно только в двух случаях: либо две скобки равны 1, а третья равна 33, либо одна из скобок равна 1, другая 3, третья 11. В задаче требуется найти сумму $x + y + z$. В первом случае:

$$x + y + z = (x - 2) + (y - 3) + (z - 1) + 6 = 1 + 1 + 33 + 6 = 41.$$

Во втором случае:

$$x + y + z = (x - 2) + (y - 3) + (z - 1) + 6 = 1 + 3 + 11 + 6 = 21.$$

Критерии проверки: Верное решение – **7 баллов**, получены оба ответа, но при переборе вариантов пропущены случаи – **4 балла**, при переборе вариантов пропущены случаи и получен только один из ответов – **не более 3 баллов**, в остальных случаях, в том числе только ответ с проверкой – **0 баллов**.



ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2020/21 гг.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
МАТЕМАТИКА
9 КЛАСС

- б. В памяти компьютера хранится строка чисел, бесконечная в обе стороны. Сначала одно из чисел равно единице, все остальные – нули. За один шаг к каждому числу прибавляется сумма обоих соседних с ним чисел (все преобразования происходят одновременно). Может ли в какой-то момент, начиная со второго шага, оказаться, что все ненулевые числа строки – нечетны?

Ответ: нет.

Решение: После первого шага строка имеет вид:

..., 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, ...

После второго:

..., 0, 0, 1, 2, 3, 2, 1, 0, 0, ...

И так далее. Выпишем в таблицу информацию о четырёх крайних слева ненулевых числах в каждой строке, начиная со второго шага: при четном числе – **ч**, при нечетном – **н**.

После 2-го: н, ч, н, ч

После 3-го: н, н, ч, н

После 4-го: н, ч, ч, ч

После 5-го: н, н, н, ч

После 6-го: н, ч, н, ч

Видно, что свойство рассматриваемых чисел последней строки точно такие же, как у первой строки в данной таблице. Следовательно, ситуация будет периодически повторяться через каждые 4 шага. Так как в каждой из первых четырех строк имеется четное ненулевое число, то оно будет и во всех последующих строках.

Критерии проверки: Верное решение – **7 баллов**, в остальных случаях – **0 баллов**.