Приложение № 8
к организационно-технологической модели
проведения муниципального этапа
всероссийской олимпиады школьников
на территории города Омска

ПРОТОКОЛ
проверки олимпиадной работы участника

Предмет Математика
Класс 11
Шифр М-11-11
№ тура (если есть)

Заполняется проверяющими членами жюри

№ заданий		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**ИТОГО**
Максимальное количество баллов		7	7	7	7	7	7					
Баллы членов жюри	Эксперт 1	7	7	7	7	7	7					
	Эксперт 2	7	7 ММА	7 ММА	7	7	7 ММА					
Итоговый балл		7	7	7	7	7	7					42

Член Жюри Игнатова Е.В

Подпись / ФИО

Член Жюри Калугина Ю.И.

Подпись / ФИО

*- количество столбцов с № задания соответствует количеству заданий по данному предмету муниципального этапа олимпиады

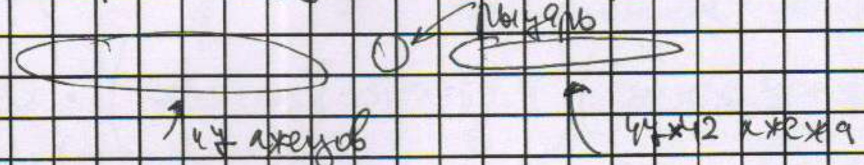
ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 11

ШИФР М-11-11

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

№1

1) Рассмотрим следующий пример:



В нем $47+(42\cdot 47)+1=(43\cdot 47)+1=2021+1=2022$ человека.

И при этом рыцарь действительно имеет 47 лжецов слева и 47·42 лжецов справа т.е. 42 раза больше.

2) Докажем, что все лжецы будут врать:

2.1) Рассмотрим любого лжеца, который говорил
2.2) Пусть он говорит правду
2.3) Тогда с какой-то стороны от него стоит рыцарь
2.4) Тогда есть два случая:
2.4.1) ~~Он этот~~ Лжец стоит рядом с рыцарем
2.4.2) Тогда он очевидно врет — ↯
2.4.3) Лжец стоит через несколько лжецов от рыцаря
2.4.4) Тогда с одной стороны от него лжецов больше, чем с этой же стороны у рыцаря, а с другой наоборот больше, чем у соответствующей стороны у рыцаря.
2.4.5) Но т.к. рыцарь говорит правду, (п.1), то лжец — врет — ↯

3) Таким образом, все лжецы врут, а рыцарь говорит правду — чтд

Ответ: пример (47 лжецов) (рыцарь) (47·42 лжеца)

Всероссийская олимпиада школьников — Муниципальный этап

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА **КЛАСС** 11

ШИФР М-11-11

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете. Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

№2

$4\cos x \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) =$ — распишем по сумме/разности аргумента косинуса:

$= 4\cdot\cos x\cdot\left(\cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x\sin\frac{\pi}{3}\right) =$

$= 4\cdot\cos x\cdot\left(\cos^2 x\cos^2\frac{\pi}{3}-\sin^2 x\sin^2\frac{\pi}{3}\right)$, где $\cos^2 a=(\cos a)^2$, $\sin^2 a=(\sin a)^2$

$\boxed{\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2} \quad \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}}$, тогда

$4\cdot\cos x\cdot\left(\frac{\cos^2 x}{4}-\frac{3\sin^2 x}{4}\right)=\cos x\cdot\left(\cos^2 x-3\sin^2 x\right)=$

$=\cos x\left(\cos 2x-2\sin^2 x\right)=\cos x\cos 2x-2\sin x\cos x\cdot\sin x=$
(по косинусу двойного угла)

$=\cos x\cos 2x-\sin 2x\cdot\sin x = \cos(x+2x)=\cos(3x)=$
(по синусу двойного угла) (по косинусу суммы)

$=\cos(3x)$ — ч.т.д.

Всероссийская олимпиада школьников Муниципальный этап

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 11

ШИФР М-11-11

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

№4 В задаче необходимо доказать I – не простые делят $(n-1)!$
II – простые не делят $(n-1)!$.

I Рассмотрим два случая: (все возможные, если n – не простое)

1) n – квадрат простого числа, тогда $n=p^2$, где p – простое
тогда очевидно, что $p<n-1 \Rightarrow$ ~~следовательно есть на~~
$\Rightarrow p$ – множитель в произведении $(n-1)!$

Докажем, что $2p<n-1 = p^2-1$

$p^2-2p-1>0$

$D=4+4=8$, следовательно

корни уравнения $\frac{2\pm 2\sqrt{2}}{2} = 1\pm\sqrt{2}$, т.е. при любых $p\geq 3$ это верно потому что $\boxed{\sqrt{2}<2}$, а значит верно для всех квадратов больше 4, что достаточно для по условию.

Но т.к. в наборе есть p и $2p$, то $(n-1)! \vdots p^2$ ЧТД

2) n – натуральное число >4 и не являющееся квадратом простого

Тогда пусть a – наименьший простой делитель n,
а $A=\frac{n}{a}$, т.е. наибольший делитель не равный n,
тогда $aA=n$

$a<n-1$
$A<n-1$ (т.к. $a\geq 2$) $\Rightarrow$ кроме того, $a\neq A$, а значит и a и A есть как множители в $(n-1)! \Rightarrow (n-1)! \vdots aA \Rightarrow (n-1)! \vdots n$

Тогда получается, что не простые $n>4$ точно делят $(n-1)!$

II Осталось доказать, что простые $n>4$ не делят $(n-1)!$, что очевидно, потому что в перемножении $1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot n-1$ не встречается простой множитель n, следовательно $(n-1)!$ не может делиться на n
— ЧТД

7б.

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 11

ШИФР М-11-11

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

№3

1) Пусть x – скорость движения Петчика (м/мин)
y – скорость движения автобуса (м/мин)

тогда т.к. автобусы едут с интервалом 12 мин, то расстояние между ними 12y

2) тогда когда Петчик встретиться со встречным автобусом расстояние до следующего встречного автобуса будет 12y, тогда

$(x+y)\cdot 9 = 12y$, т.к. это расстояние вместе они проходят за 9 минут

$9x = 3y$

$\boxed{3x = y}$

3) тогда когда Петчик встречает не встречный автобус расстояние до их пересечения 4500 м – для Петчика
4500 + 12y м – для автобуса

т.к. они встречаются через одинаковое время, то

$\frac{4500}{x} = \frac{4500+12y}{y}$, т.к. $y = 3x$, то

$\frac{1500}{x} = \frac{4500+36x}{3x}$

$\frac{500}{x} = \frac{500+4x}{3x} \rightarrow$

$1500x = 500x + 4x^2$

$4x^2 - 1000x = 0$

$x^2 - 250x = 0$

$x(x-250) = 0$

$x = 0 \quad x = 250$ м/мин

т.к. по условию Петчик все-таки едет, то $x = 0$ – не может быть

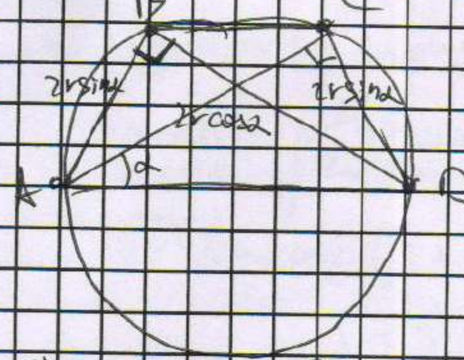
Ответ: скорость Петчика 250 метров в минуту

ПРЕДМЕТ: МАТЕМАТИКА — КЛАСС: 11

ШИФР: М-11-14

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете. Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

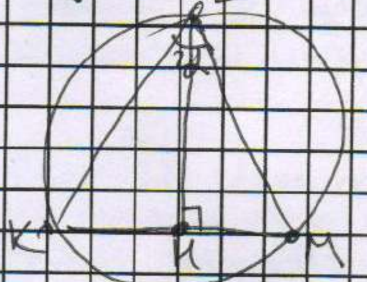
№5



1) т.к. $\angle ABD = 90$, то $B \in \Omega$, $C \in \Omega$, т.к. на 3 точках можно построить только одну окружность, а у Ω и окружности описанной около ABD одинаковый диаметр — AD, аналогично с точкой C.

2) пусть $\angle CAD = \alpha$, тогда $r_\Omega = r$; $CD = 2r\cdot\sin\alpha$, $AC = 2r\cdot\cos\alpha$, тогда $S_{ACD} =$ $= 2r^2\sin\alpha\cos\alpha$, т.к. $ABCD$ — р/б трапеция, то $AB = CD = 2r\sin\alpha$. Т.к. $\angle ACD = 90^\circ$ (из симметрии к $\angle DBA$), то $\angle CDA = 90-\alpha = \angle DAB \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle BAC = 90 - 2\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\alpha \Rightarrow S_{ABC} = \frac{4r^2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\sin(\frac{\pi}{2}-2\alpha)}{2} =$ $= 2r^2\sin\alpha\cos\alpha \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - 2\alpha)$

3) т.к. угол пересечения прямых всегда одинаковый (один пар параллельных прямых), то $\angle(AB, CD) = \angle KLM = 180 - 90 + \alpha - 90 + \alpha = \boxed{2\alpha}$



4) т.к. это также окружность Ω (п.1), то $KM = 2r\sin 2\alpha$. Построим $\perp$ из L на KM, т.к. LKM — р/б, то это биссектриса и медиана $\Rightarrow$ $\Rightarrow \boxed{HM = r\cdot\sin 2\alpha;\ \angle HLH = \alpha}$, тогда

$LH = \operatorname{ctg}\alpha\cdot r\cdot\sin 2\alpha \Rightarrow \boxed{S_{LKM} = (r\cdot\sin 2\alpha)^2\cdot\operatorname{ctg}\alpha} =$

$= \frac{(2r\sin\alpha\cos\alpha)^2\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{4r^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha} =$

$= \boxed{4r^2\cdot\sin\alpha\cdot\cos^3\alpha}$

Всероссийская олимпиада школьников

Муниципальный этап

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС	11
ШИФР	М-11-11		

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете. Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

№5 продолжение

5) Сравним площади:

$S_{ABCD} = 2r^2 \sin\alpha\cos\alpha + 2r^2 \sin\alpha\cos\alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)$

$S_{LKM} = 2r^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos^3\alpha$

$\cancel{2r^2 \sin\alpha\cos\alpha}\left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)\right) \vee \cancel{2r^2 \sin\alpha} \cdot \cos^3\alpha$

$1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) \vee 2\cos^2\alpha$

$1 + \cos(2\alpha) \vee 2\cos^2\alpha$ т.к. $2\alpha < \pi$, т.к. $\boxed{\alpha < \frac{\pi}{2}}$

$\frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \vee \cos^2\alpha$ — формула понижения степени, следовательно,

выполнено равенство $S_{ABCD} = S_{LKM}$ — $\underline{\text{ЧТД}}$

№6

1) Докажем, что игра всегда заканчивается в одинаковом наборе камней:

1.1) Пусть кучка I ранга — куча с 1 камнем, а куча n-ранга получается из 3 куч n-1 ранга, тогда заметим, что количество камней в кучке n ранга 3^{n-1}, что очевидно, но можно доказать по индукции: База $n=1 \Rightarrow 3^{1-1} = 1$ — верно

Переход $n \to n+1$: в куче $n+1$ ранга камней $3^n + 3^n + 3^n = 3^{n+1}$ — $\underline{\text{ЧТД}}$

1.2) Игра заканчивается, если куч каждого ранга не более двух. Таким образом, конечный набор — это просто представление числа n (где n — общее кол-во камней) в троичной системе счисления, где разряд соответствует количество куч 1 ранга, 2 — количество куч 2 ранга и т.д.

1.3) Но одно и то же число из 10 системы счисления в 3 переводится единственным образом ⇒ в конце всегда одинаковое количество групп одинакового ранга — ЧТД

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС	11
ШИФР	М-11-11		

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

2) Тогда заметим, что каждый ход убирает 3 кучи и добавляет одну ⟹ за каждый ход количество ~~кол~~ групп уменьшается на 2. В самом начале групп было 2021, в конце по доказанному в п.1 — это сумма цифр в представлении числа 2021 в 3-степени счисления, переведем его:

$$2021 : 3 = 673 \text{ (ост. } 2), \quad 673 : 3 = 224 \text{ (ост. } 1), \quad 224 : 3 = 74 \text{ (ост. } 2), \quad 74 : 3 = 24 \text{ (ост. } 2), \quad 24 : 3 = 8 \text{ (ост. } 0), \quad 8 : 3 = 2 \text{ (ост. } 2)$$

Таким образом, $2021 = 2202212_3$, следовательно в конце $2+2+0+2+2+1+2$ групп $= 11$

3) Заметим, что пока групп не стало 11 ходить можно, потому что это не конечная позиция (по п.1), следовательно, победит тот, кто на чьем ходу ~~групп~~ вычитанием 2 получится 11, т.к. следующий походить не сможет.

исходное кол-во групп	2021	2021	2021	2021	
текущее кол-во групп	2019	2017	2015	2013	
разность	2	4	6	8	. . . . .
чей ход сделан	1	2	1	2	

т.е. если разность четно-четная, то последний ход был у второго игрока

$2021 - 11 = 2010 \equiv 2$ ⟶ последний ход был у первого ⟹ ⟹ второй проиграл.

Ответ: всегда победит Петя, ему нужно просто соединять любые 3 кучи одного ранга каждый свой ход.